Série N° 3 – Equations Différentielles

Préparée par Dr. S. Bellala

Exercice 0 (S'entrainer)

Montrer que les fonctions suivantes aux constantes arbitraires sont des solutions des équations différentielles correspondantes.

1. $y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}$ $\qquad y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$
2. $y = Cx + C - C^2$ $\qquad y'^2 - (x+1)y' + y = 0$
3. $y^2 = 2Cx + C^2$ $\qquad yy'^2 + 2xy' - y = 0$
4. $y^2 = Cx^2 - \frac{a^2C}{1+C}$ $\qquad xy[1 - y'^2] = (x^2 - y^2 - a^2)y'$
5. $y = C_1x + \frac{C_2}{x} + C_3$ $\qquad y''' + \frac{3}{x}y'' = 0$
6. $y = (C_1 + C_2x)e^{kx} + \frac{e^{kx}}{(k-1)^2}$ $\qquad y'' - 2ky' + k^2y = e^x$
7. $y = C_1e^{\alpha\sin^{-1}x} + C_2e^{-\alpha\sin^{-1}x}$ $\qquad (1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2y = e^x$

A. Équations Différentielles d'ordre 1

Exercice 1 (Séparation des Variables)

Résoudre les équations à variables séparables suivantes

$y' = \frac{y}{x}$; $(y+1)xy' - (x-1)y = 0$; $(x-1)y' = y + 1$

$y' = \frac{y^2+1}{x^2+1}$; $x^2(1-y)y' + (1+x)y^2 = 0$; $x^2y' + y - a = 0$

$(x^2 - a^2)y' = y$; $\sqrt{x}y' - y^2 - 1 = 0$; $dy + y\tan x\, dx = 0$

Exercice 2 (Un peu de physique)

Loi de Newton : La vitesse de refroidissement d'un corps quelconque dans l'air est proportionnelle à la différence de leurs températures. La température de l'air étant de 25°C, la température du corps chute de 115°C à 70°C en 10 mn. En combien de temps sa température tombera à 40°C ().

Le freinage d'un disque tournant dans un liquide est proportionnel à sa vitesse angulaire de rotation ω. Si la vitesse ω tombe de $100\, tr/mn$ à $60\, tr/mn$ en $1\, mn$. Trouver l'expression $\omega(t)$.

Exercice 3 (Équations linéaires d'ordre 1 à coefficients constants)

Résoudre les équations différentielles suivantes

$5y' = 2y + 1$; $y' - 2y = \sqrt{x}$; $\pi y' + \pi^2 y - \ln x = 0$; $y' = y + x^3 - x$

$y' = (\sqrt{2} - 1)y + e^{\sqrt{2}x}$; $y' - 3y - \sin(3x) = 0$; $7y' = 9\cos(7x) + y$.

Exercice 4 (Équations linéaires d'ordre 1 à coefficients non constants)

Résoudre les équations différentielles suivantes

$y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$; $y' - \frac{a}{x}y = 1 + \frac{1}{x}$; $x(1-x^2)y' + (2x^2+1)y - ax^3 = 0$

$\cos t\,\dot{x} + \sin t\,x = 1$; $\dot{x} + \cos t\,x = \frac{1}{2}\sin(2t)$; $y' - \frac{n}{x}y = x^n e^x$; $y' + \frac{n}{x}y = ax^{-n}$.

B. Équations Différentielles Linéaires d'ordre 2

Exercice 5 (Équations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants)

Résoudre les équations différentielles linéaires suivantes

$y'' = 9y$; $y'' + y = 0$; $y'' - y = 0$; $y'' + 5y = 7y'$; $y'' - 4y' + 4y = x^2 - x$;

$y'' - 7y' + 12y = x + \sqrt{2}$; $y'' + 2y' + 10y = 3e^{-x} - 2e^{2x}$;

$y'' + 2y' + 10y = 3xe^{-x} - 2e^{2x}$; $y'' + y' - 2y = 5\sin(3x)$;

$\ddot{x} - 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = a\sin(\omega t)$.

Exercice 6 (Équations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants)

En physique des vibrations, un système à 1 degré de liberté est décrit par l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = a\sin(\omega t),$$

aux conditions initiales

$$x(0) = x_0 \; ; \; \dot{x}(0) = B.$$

1. Quel est le sens de chaque terme de l'équation différentielle ?
2. Résoudre cette équation différentielle.

Exercice 7 (Équations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants)

Trouver la solution de l'équation

$$\ddot{x} + a^2 x = e\cos(bt) \; ; \; (b \neq a),$$

satisfaisant aux conditions initiales

$$x(0) = A \; ; \; \dot{x}(0) = B.$$

Exercice 8 (Un peu de physique)

Un point matériel de masse m est sollicité par deux centres distants de l, les forces étants proportionnelles à la distance. Le point se trouve initialement à la distance a du milieu sur la même ligne. La vitesse initiale est nulle. Trouver la position du point en fonction du temps $x(t)$.

Dans la question précédente, la vitesse initiale v_0 est non nulle et elle est dirigée perpendiculairement à la droite entre les deux centres. Trouver la trajectoire.