Série N° 1 – Intégrales Simples & Intégrales Impropres

Préparée par Dr. S. Bellala

1ère Partie : Intégrales Simples

A. Principes (Intégration selon Riemann)

Exercice 1 (Partitions)

Soit la fonction $f(x) = x$ et l'intervalle $[0; 1]$ et soit la partition :

$$p_1 = [0; 0,1; 0,3; 0,65; 0,9; 1].$$

- Calculer les sommes inférieure et supérieure de Riemann S_1^- et S_1^+. Vérifier que : $S_1^- < S_1^+$

On affine maintenant la partition p_1 en insérant un point dans chaque sous-intervalle pour produire la nouvelle partition :

$$p_2 = [0; 0,7; 0,1; 0,21; 0,3; 0,43; 0,65; 0,76; 0,9; 0,97; 1].$$

- Recalculer les sommes inférieure et supérieure de Riemann S_2^- et S_2^+. Vérifier que :
$$S_1^- < S_2^- < S_2^+ < S_1^+$$
- Conclure à propos d'une partition aussi affine que possible.

Exercice 2 (Applications)

Soient les fonctions :

1. $f(x) = x$ 2. $f(x) = x^2$ 3. $f(x) = e^{-x}$

- Utiliser une subdivision uniforme et calculer les intégrales au sens de Riemann de ces fonctions sur l'intervalle $[0; 1]$.
- Comparer aux résultats obtenus par le théorème fondamental du calcul intégral.

Données : $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$; $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
$\sum_{i=1}^{n} r^i = \frac{r^n-1}{r-1}$ avec $r \in]0; 1[$.

B. Intégrales Indéfinies (Calcul des Primitives)

Exercice 3 (Sans Calcul Intégrales)

Trouver les primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x(2x^2 + 1)^3$
2. $f(x) = \frac{1}{x}\left(\ln x + \sqrt{2}\right)^{2/3}$
3. $f(x) = \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$
4. $f(x) = \tan x$
5. $f(x) = x\ln(x^2 - 1)$
6. $f(x) = \cos x\sqrt{\sin x}$
7. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^{3/2}+2}$
8. $f(x) = xe^{-x^2}$.

Exercice 4 (Sans Calcul Intégrales)

Trouver les primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 2^x e^{-2x}$
2. $f(x) = \frac{x^6}{1+x^{14}}$
3. $f(x) = \frac{1}{1+\cos(8x)}$
4. $f(x) = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$
5. $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$

Exercice 5 (Intégration par Changement de Variables)

Calculer les intégrales indéfinies suivantes :

$$1.\ \int (x + x^{2025})^{2023}\, dx \quad ; \quad 2.\ \int x^3 e^{-x^2}\, dx \quad ; \quad 3.\ \int \frac{\ln x}{(1+\ln x)^2} dx \quad ;$$

$$4. \int \frac{\sin(3x)}{\sin x} dx \quad ; \quad 5. \int \frac{2\sin x}{\cos x + \sin x} dx$$

C. Intégrales Définies (Calcul d'Aires)

Exercice 6 (Intégration Par Parties)

Calculer les intégrales suivantes par parties :

$$1.\ \int_0^1 x^2 e^{-x}\, dx \qquad 2.\ \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx \qquad 3.\ \int_0^1 x \arctan x\, dx$$

$$4.\ \int_{-1}^1 x \sinh x\, dx \qquad 5.\ \int_0^{\pi/4} \sin(2x)\, e^{-x}\, dx$$

Exercice 7 (Intégration par Changement de Variables)

Calculer les intégrales définies suivantes :

$$1.\ \int_{-1}^1 \cos x \cos^{-1} x\, dx \qquad 2.\ \int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+2^{\sin x}} dx \qquad 3.\ \int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1} dx$$

Exercice 8 (Intégration par Fractions Partielles)

Calculer l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} dx$$

Commenter le résultat.

Exercice 9 (Utilisation de la règle du roi)

Démontrer le résultat suivant :

$$\int_a^b f(a+b-x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$$

Déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$$

2ème Partie : Intégrales Impropres & Intégrales généralisées

D. Intégrales Impropres

Exercice 10

Montrer par un changement de variables que pour tout $\alpha \in]0;1[$ l'intégrale suivante est nulle :

$$\int_{\alpha}^{1/\alpha} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$$

- Conclure le résultat lorsque $\alpha \to 0$.
- Montrer qu'il s'agit d'une conversion entre deux espèces d'intégrales impropres.

Exercice 11

Calculer, si elles convergent, les intégrales suivantes :

$$1. \int_0^{\infty} \frac{x\tan^{-1} x}{(1+x^2)^2}\,dx \ ; \ 2. \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin x}\,dx \ ; \ 3. \int_0^1 \ln x\,dx \ ; \ 4. \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^{2024})}\,dx$$

Exercice 12

Calculer les intégrales suivantes si elles convergent :

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx \ ; \ \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

Exercice 13

Soient I_n et J_n les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2}\,dx \ ; \ J_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2}\,dx \quad avec\ \alpha > 0$$

- Montrer que $J_{2n+1} = 0$ et $J_{2n} = 2I_n$.
- Par dérivation par rapport à α, trouver une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n.
- Calculer I_1.
- On donne $J_0 = \sqrt{\pi/\alpha}$, déduire les quatre premières valeurs de I_n et J_n.