Série N° 2 – Intégrales Multiples

Préparée par Dr. S. Bellala

A. Intégrales Doubles

Exercice 1 (Coordonnées Cartésiennes)

Calculer

$$\iint_{\mathcal{D}} e^{-x-y}\,dx\,dy$$

Où $\mathcal{D}$ est compris entre deux carrés centrés à l'origine et dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées, sachant que les côtés sont respectivement égaux à 2 et à 4.

Exercice 2 (Coordonnées Cartésiennes)

Calculer l'intégrale

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy$$

Dans les cas suivants :

- $\mathcal{D}$ est le triangle de sommets O, $A(1,0)$ et $B(0,1)$ | $f(x,y) = \ln(x+y+1)$.
- $\mathcal{D}$ est limité par les courbes d'équations $y = \frac{1}{x}$ et $y = -4x + 5$ | $f(x,y) = x^2 y$.
- $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points du plan tels que $|x| + |y| \leq 1$ | $f(x,y) = e^{x+y}$.
- $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points du plan formé par l'intersection des deux disques[1] $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ et $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$ | $f(x,y) = x$.

Exercice 3 (Coordonnées Cartésiennes)

Calculer

$$\iint_{\mathcal{D}} x^{-1}\,dx\,dy$$

Où $\mathcal{D}$ est limité par les courbes $y = 2x$, $y = \frac{x}{2}$, $y = \frac{3}{y}$ et $y = \frac{1}{3y}$; $x > 0$.

N.B. : Ne pas passer aux coordonnées curvilignes.

[1] Examen de Rattrapage 2022-2023.

Exercice 4 (Passage aux Coordonnées Polaires)

Calculer l'intégrale

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy$$

en passant aux coordonnées polaires dans les cas suivants :

- $\mathcal{D}$ est la couronne de centre O et de rayons a et b $(a < b)$ | $f(x,y) = 1/(x^2 + y^2)$.
- $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points du disque unité tels que $0 \leq y \leq x$ | $f(x,y) = (x - y)^2$.
- $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points du carré $[0,1] \cdot [0,1]$ extérieur au cercle unité | $f(x,y) = xy/(1 + x^2 + y^2)$.

Exercice 5

Calculer le volume délimité par le paraboloïde $z = x^2 + y^2$, le cylindre $x^2 + y^2 = 1$ et le plan $z = 0$.

Exercice 6 (Passage aux Coordonnées Curvilignes)

Calculer l'intégrale

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy$$

en utilisant le changement de variables indiqué.

- $\mathcal{D}$ est limité par les courbes $y = 2x$, $y = \frac{x}{2}$, $y = \frac{3}{y}$ et $y = \frac{1}{3y}$; $x > 0$ | $f(x,y) = 1$.
  Changement de variables $x = u/v$ et $y = uv$.
- $\mathcal{D}$ est limité par l'ellipse $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ | $f(x,y) = x^2 + y^2$
  Coordonnées elliptiques $x = au\cos v$ et $y = bu\sin v$.

B. Intégrales Triples

Exercice 7 (Coordonnées Cartésiennes)

Calculer l'intégrale

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Dans les cas suivants :

- Ω est le domaine limité par les plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ et $x + y + z = 1$ | $f(x,y,z) = (x + y + z)^2$.
- Ω est l'ensemble des point vérifiant $\begin{cases} 0 \leq y \leq 1 - x^2 \\ |x + y + z| \leq 1 \end{cases}$ | $f(x,y,z) = x^2 y$.
- Ω est le domaine limité par les plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ et la sphère unité et $\phi \leq \pi/2$ | $f(x,y) = xyz$.

Exercice 8 (Coordonnées Cylindriques)

Calculer l'intégrale

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Dans les cas suivants :

- Ω est le domaine limité par le cylindre $x^2 + y^2 = 1$ le paraboloïde $z = 1 - (x^2 + y^2)$, et le plan $z = 4$ | $f(x,y,z) = (x^2 + y^2)^{1/2}$.
- Ω est le volume délimité par le cylindre $x^2 + y^2 = 3^2$ et la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 5^2$ | $f(x,y,z) = 1$.

Exercice 9 (Coordonnées Sphériques)

Calculer l'intégrale

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Dans les cas suivants :

- Ω est la sphère de centre O et $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ | $f(x,y,z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$.
- Ω est la sphère de centre O et $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ | $f(x,y,z) = \left\|\vec{\nabla}(x^2 + y^2 + z^2)\right\|$.

Exercice 10 (Passage aux Coordonnées Curvilignes)

Calculer le volume

$$V = \iiint_{\Omega} dx\,dy\,dz$$

Dans les domaines Ω suivants :

- Partie de la sphère de centre O et de rayon R comprise entre les plans $z = h_1$ et $z = h_2$ $(-R \leq h_2 \leq h_1 \leq R)$.
- Secteur sphérique limité par la sphère de centre O et de rayon R et le cône supérieur de sommet O et d'angle 2α.
- Partie limitée par la sphère unité et le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = y$.