Série N° 1 – Calcul Des Intégrales

Préparée par Dr. S. Bellala

A. Sommes de Riemann

Exercice 2 (Calcul d'Aires)

Soit la fonction $f(x) = x$ et l'intervalle $[0; 1]$ et soit la partition :

$$p_1 = [0; 0{,}1; 0{,}3; 0{,}65; 0{,}9; 1].$$

Calculer les sommes de Riemann inférieure et supérieure S_1^- et S_1^+. Vérifier que :

$$S_1^- < S_1^+$$

En affinant maintenant la partition p_1 en insérant un point dans chaque sous-intervalle pour produire la nouvelle partition :

$$p_2 = [0; 0{,}7; 0{,}1; 0{,}21; 0{,}3; 0{,}43; 0{,}65; 0{,}76; 0{,}9; 0{,}97; 1].$$

Calculer à nouveau les sommes de Riemann inférieure et supérieure S_2^- et S_2^+. Vérifier que :

$$S_1^- < S_2^- < S_2^+ < S_1^+$$

Exercice 3

Soient les fonctions :

1. $f(x) = x$ 2. $f(x) = x^2$ 3. $f(x) = e^{-x}$

- Calculer les intégrales au sens de Riemann de ces fonctions sur l'intervalle $[0; 1]$.
- Comparer avec le résultat obtenu avec la primitive.

Indication : Utiliser une subdivision uniforme.

Données : $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$; $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

$\sum_{i=1}^{n} r^i = \frac{r^n-1}{r-1}$ avec : $r \in]0; 1[$.

B. Calcul de Primitives

Exercice 1 (Sans Calcul d'Intégrales)

Trouver les primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x(2x^2 + 1)^3$
2. $f(x) = \frac{1}{x}\left(\ln x + \sqrt{2}\right)^{2/3}$
3. $f(x) = \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$
4. $f(x) = \tan x$
5. $f(x) = x\ln(x^2 - 1)$
6. $f(x) = \cos x\sqrt{\sin x}$
7. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^{3/2}+2}$
8. $f(x) = xe^{-x^2}$.

C. Intégrales Définies & Indéfinies

Exercice 4 (Intégration Par Parties)

Calculer les intégrales suivantes par parties :

1. $\int_0^1 x^2 e^{-x}\, dx$
2. $\int_0^{\pi/2} (\cos x)^2\, dx$
3. $\int_0^1 x \arctan x\, dx$
4. $\int_{-1}^1 x \sinh x\, dx$
5. $\int_0^{\pi/4} \sin(2x)\, e^{-x}\, dx$

Exercice 5 (Intégration par Changement de Variables)

Calculer les intégrales indéfinies suivantes :

1. $\int (x + x^{2025})^{2023}\, dx$
2. $\int x^3 e^{-x^2}\, dx$
3. $\int \frac{\ln x}{(1 + \ln x)^2} dx$
4. $\int \frac{\sin(3x)}{\sin x} dx$
5. $\int \frac{2 \sin x}{\cos x + \sin x} dx$

Calculer les intégrales définies suivantes :

1. $\int_{-1}^1 \cos x \cos^{-1} x\, dx$
2. $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1 + 2^{\sin x}} dx$
3. $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 1} dx$

Exercice 6 (Intégration par Fractions Partielles)

Calculer l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{x^4(1 - x^4)}{1 + x^2} dx$$

Commenter le résultat.

D. Intégrales Impropres

Exercice 7

Montrer par un changement de variables que pour tout $\alpha \in]0; 1[$ l'intégrale suivante est nulle :

$$\int_\alpha^{1/\alpha} \frac{\ln x}{1 + x^2} dx$$

- Conclure le résultat lorsque $\alpha \to 0$.
- Montrer qu'il s'agit d'une conversion entre deux espèces d'intégrales impropres.

Exercice 8

Démontrer le résultat suivant :

$$\int_a^b f(a + b - x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$$

et déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1 + x)}{1 + x^2} dx$$

Exercice 9

Calculer, si elles convergent, les intégrales suivantes :

$$1. \int_0^\infty \frac{x\tan^{-1}x}{(1+x^2)^2}dx \;\; ; \;\; 2. \int_0^\pi \frac{1}{1+\sin x}dx \;\; ; \;\; 3. \int_0^1 \ln x\, dx \;\; ; \;\; 4. \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)(1+x^{2024})}dx$$

Exercice 10

Calculer les intégrales suivantes si elles convergent :

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+x}}dx \;\; ; \;\; \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}dx$$

Exercice 11

Soit les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2}\, dx \; ; J_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2}\, dx \quad avec\ \alpha > 0$$

- Montrer que $J_{2n+1} = 0$ et $J_{2n} = 2I_n$.
- Par dérivation par rapport à $\alpha\alpha$, trouver une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n.
- Calculer I_1.
- On donne $J_0 = \sqrt{\pi/\alpha}$, déduire les quatre premières valeurs de I_n et J_n.