Série N° 3 – Intérgation Complexe

Préparée par Dr. S. Bellala

A. Intégration le long d'un chemin ouvert

Exercice 1

Intégrer les fonctions suivantes le long des chemins respectifs

- $f(z) = 4z^2 - iz$; $\mathcal{C}$: la droite reliant les deux points 0 à $1 + 4i$.
- $f(z) = ze^z$; $\mathcal{C}$: l'arc de cercle de rayon $r = 2$ et $\theta \in [0, \pi]$.
- $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$; $\mathcal{C}$: la partie de la parabole $z(t) = t + it^2$ avec $t \in [0,1]$.
- $f(z) = \frac{1}{z}$; $\mathcal{C}$: le demi-cercle droit de rayon $r = 3$.

Exercice 2

Soit z appartenant au segment de droite horizontal $\{x + 2i, -2 \leq x \leq 2\}$, Intégrez la fonction $f(z) = z/(z-i)$ le long de ce segment.
Que dites-vous à propos du segment $\{x + i, -2 \leq x \leq 2\}$.

Exercice 3

Trouver une majoration (un supérieur) des intégrales suivantes le long des chemins respectifs

- $\int_{\mathcal{C}} \frac{z\,dz}{z^2 - iz + 5}$; $\mathcal{C}$ est le segment de droite $z(t) = t + 3it$.
- $\int_{\mathcal{C}} \frac{e^z\,dz}{z+i}$; $\mathcal{C}$ est l'arc de cercle $z(t) = 2e^{it}$ où $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

B. Théorème de Cauchy

Exercice 4

Calculer, sur les chemins indiqués, les intégrales suivantes

- $\int_{\mathcal{C}} x^2 - y^2 + 2ixy\,dz$; $\mathcal{C}$: l'arc de cercle unité centré à l'origine, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
- $\int_{\mathcal{C}} \sqrt{z}\,dz$; $\mathcal{C}$: le segment de droite $i \to 1$.
- $\int_{\mathcal{C}} \ln z\,dz$; $\mathcal{C}$: la partie de la parabole $z(t) = t^2 + 1 + it$ avec $t \in [0,1]$.
- $\int_{\mathcal{C}} e^z\,dz$; $\mathcal{C}$: le cercle, de rayon 3 unité, centré à l'origine.

Exercice 5

Calculer, sur les chemins fermés indiqués, les intégrales suivantes

- $\int_{\mathcal{C}} z^2\, dz$; $\mathcal{C}$: le cercle unité centré à l'origine.
- $\int_{\mathcal{C}} |z|\, dz$; $\mathcal{C}$: le cercle unité centré à l'origine.
- $\int_{\mathcal{C}} y\, dz$; $\mathcal{C}$: le triangle de sommets 0, 1 et i.
- $\int_{\mathcal{C}} e^z\, dz$; $\mathcal{C}$: le cercle, de rayon R unité, centré à l'origine.

Exercice 6

Montrer que

$$\oint_{\mathcal{C}} z\, dz = 0 \quad ; \oint_{\mathcal{C}} \bar{z}\, dz \neq 0$$

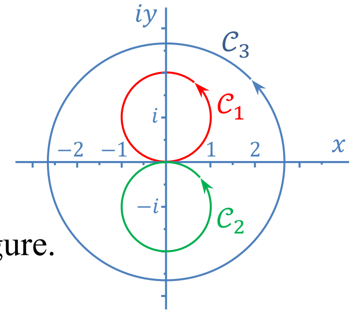
où $\mathcal{C}$ est une boucle circulaire centrée à l'origine et de rayon R. Conclure.

Exercice 7

Examiner l'intégrale de la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$$

sur les différents chemins fermés suivants : $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ montrés sur la figure.



Astuce : Décomposer la fonction en fractions simples.

C. Formules de Cauchy

Exercice 8

Soit $f(b) = \int_{\mathcal{C}} \frac{z^2 - iz + 2}{z - a}\, dz$

où $\mathcal{C}$ est une boucle fermée entourant a et b. Calculer $f(c)$ pour tout c à l'intérieur de $\mathcal{C}$.

Exercice 9

Calculer les intégrales suivantes

- $\int_{\mathcal{C}} \frac{e^{1/z}}{z(z-1)}\, dz$; $\mathcal{C}$ est le cercle de centre 2 et de rayon $\frac{3}{2}$.
- $\int_{\mathcal{C}} \frac{z}{z^2 - 1}\, dz$; $\mathcal{C}$ est le cercle de centre 1 et de rayon 1.
- $\int_{\mathcal{C}} \frac{\sin(z^2)}{z}\, dz$; $\mathcal{C}$ est le cercle de centre 0 et de rayon 5.

Exercice 10

Calculer

- $\int_{\mathcal{C}} \frac{z^2}{(z-i)^2}\, dz$; $\mathcal{C}$ est le cercle de centre i et de rayon 2.
- $\int_{\mathcal{C}} \frac{\cos z}{z^4}\, dz$; $\mathcal{C}$ est le cercle de centre 0 et de rayon 1.