

Série N° 2 – Fonctions d'une Variable Complexe

Préparée par Dr. S. Bellala

A. Images par des Fonctions

Exercice 1

Soit la fonction $f(z) = z^2 - z$, trouver les images des nombres : i , $1 + i$ et $-2 - 5i$.

Soit la variable complexe z appartenant au segment vertical $x_0 + iy$, $-2 \leq y \leq 2$, trouver son image par la fonction f .

Exercice 2

Trouver l'image du disque unité ($|z| < 1$) par la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$.

B. Limites et Continuité

Exercice 3

1. Montrer que

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i} = 4(1 + i)$$

2. Trouver lesquelles des limites suivantes existes

$$a. \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1 - \bar{z}}{1 - z} \quad b. \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z}{1 + \bar{z}} \quad c. \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}^2 - z^2}{1 - z}$$

Exercice 4

Montrer que la fonction

$$f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$$

est continue partout sauf en $z = 0$.

Exercice 5

1. Examiner la continuité de la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$$

sur le disque unité.

2. Montrer que la fonction $f(z) = z^2$ est uniformément continue sur le domaine $|z| < 1$.

C. Dérivabilité et Dérivation

Exercice 6

Calculer la dérivée de la fonction

$$f(z) = 3iz^3 - 2z$$

à l'aide de la définition à un point quelconque $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 7

Montrer que la fonction $f(z) = \bar{z}$ n'est pas dérivable partout sur \mathbb{C}

De même pour la fonction

$$f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$$

Conclure.

Exercice 8

Soit la fonction

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

- Trouver sa dérivée par les méthodes de dérivation usuelles.
- Est-elle dérivable partout ou existe-il des points de non-dérivabilité ? lesquels ?

D. Holomorphie et Harmonicité

Exercice 9

Montrer que l'holomorphie d'une fonction $f(z) = u + iv$ implique l'harmonicité des fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$.

Exercice 10

Soit $u(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y)$ une fonction harmonique.

- Trouver la fonction harmonique $v(x, y)$ pour que u et v soient les composantes réelle et imaginaire d'une fonction holomorphe $f(z) = u + iv$.
- Trouver cette fonction f .

N.B. :

Ces exercices peuvent ne pas couvrir tout le cours. Je vous conseille de travailler sur les deux bouquins que je vous ai donné.