Dynamique du Point Matériel

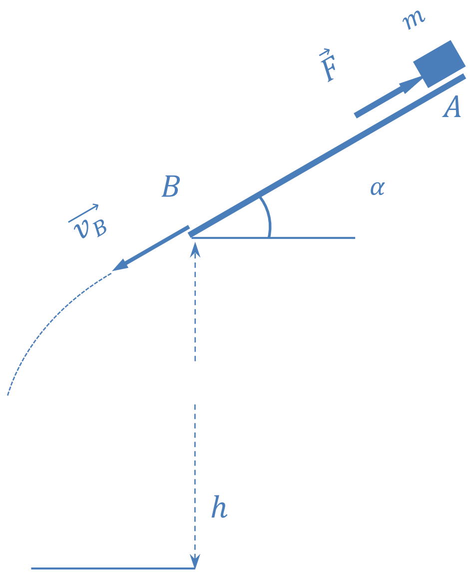
Exercice 3

Une force $\vec{F}$ maintient un corps de masse $m = 5\,kg$ en équilibre au point A, sur un plan incliné qui fait un angle $\alpha = 30°$ avec l'horizontale. Le contact entre le corps et la surface du plan est caractérisé par un coefficient de frottement statique $\mu_s = 0,6$ et un coefficient de frottement dynamique $\mu_d = 0,5$.

1. Quel est le module de la force $\vec{F}$ appliquée au corps m ?

On élimine la force $\vec{F}$ et on libère le corps m sans vitesse initiale.

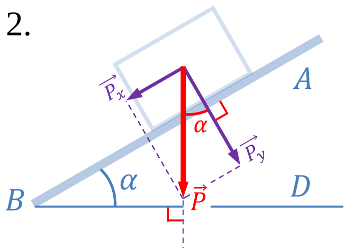
2. Quelle est l'accélération du corps m ?
3. Sachant que $AB = 1\,m$, calculer la valeur de la vitesse, avec laquelle le corps m quitte le plan incliné au point B.
4. Calculer la vitesse du corps m à son arrivé au sol, après avoir descendu une hauteur $h = 2\,m$.

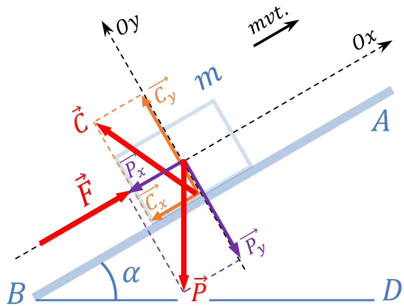


La Représentation des Forces – Équilibre

La force $\vec{F}$ est dirigée vers le haut, elle empêche la masse de descendre. Elle impose donc le sens du mouvement. D'où, le choix des axes ainsi que la représentation des forces ci-contre :

$\alpha = \widehat{AB, BD} = \widehat{\overrightarrow{P_y}, \vec{P}}$: leurs côtés sont $\perp$ 2 à 2.





Le Module de la Force $\vec{F}$

On applique à m, le principe fondamental de la dynamique, à l'équilibre :

La masse m : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{P} + \vec{C} + \vec{F} = \vec{0}.$

Projections : $Ox:\ F - P_x - C_x = F - P_x - \mu_s P_y = 0. \quad (1)$

$Oy:\ C_y - P_y = 0.$

Or, $\frac{C_x}{C_y} = \mu_s$ donc : $C_x = \mu_s C_y = \mu_s P_y.$

Avec : $\begin{cases} P_x = P\sin\alpha \\ P_y = P\cos\alpha \end{cases}$. D'où, l'équation (1) devient :

$$F - P_x - \mu_s P_y = F - mg\sin\alpha - \mu_s mg\cos\alpha = 0.$$

Donc :

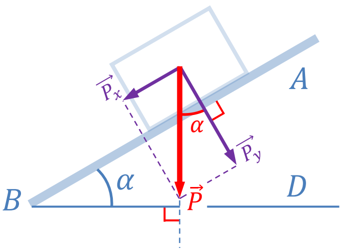
$$F = mg(\sin\alpha + \mu_s\cos\alpha).\ \blacksquare$$

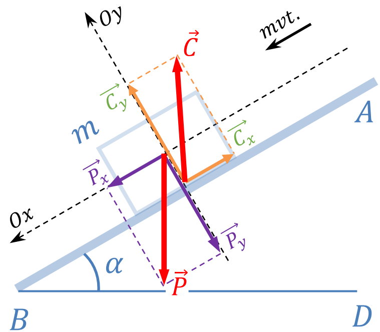
$$F = 5\cdot 9{,}8\cdot\left(0{,}5 + 0{,}6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 49{,}96\,N.\ \blacksquare$$

La Représentation des Forces – Mouvement

La force $\vec{F}$ est supprimée, la masse m descend. Le sens du mouvement est vers le bas. D'où, le choix des axes ainsi que la représentation des forces ci-contre :

$\alpha = \widehat{AB, BD} = \widehat{\overrightarrow{P_y}, \vec{P}}$: leurs côtés sont $\perp$ 2 à 2.





L'Accélération du Corps m

On applique à m, le principe fondamental de la dynamique, en mouvement :

La masse m : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{P} \mp \vec{C} = m\vec{a}$.

Projections : Ox : $P_x - C_x = ma$. (2)

Oy : $C_y - P_y = 0$. (Pas de mouvement selon Oy)

Or, on a $\frac{C_x}{C_y} = \mu_d$ donc : $C_x = \mu_d C_y = \mu_d P_y$.

Donc, l'équation (2) donne : $P_x - \mu_d P_y = ma$, avec : $\begin{cases} P_x = P\sin\alpha \\ P_y = P\cos\alpha \end{cases}$.

D'où : $a = \frac{P_x - \mu_d P_y}{m} = \frac{mg\sin\alpha - \mu_d mg\cos\alpha}{m}$.

$$a = g(\sin\alpha - \mu_d\cos\alpha). \blacksquare$$

$$a = 9{,}8 \cdot \left(0{,}5 - 0{,}5\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 0{,}66\, m/s^2. \blacksquare$$

La Vitesse v_B – 1ère Méthode

La masse m est lâchée sans vitesse initiale : $v_B = 0$.

Elle parcourt AB avec l'accélération $\vec{a}$. Donc :

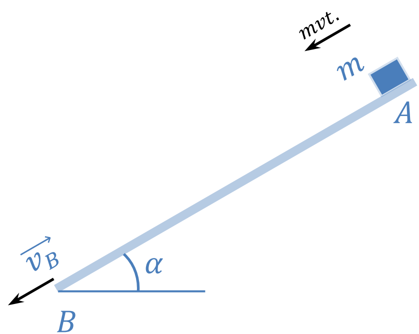
$$v_B^2 - v_A^2 = 2a(x_B - x_A) = 2a \cdot AB$$

Donc :

$$v_B^2 = 2a \cdot AB.$$

Ou :

$$v_B = \sqrt{2a \cdot AB}$$



La Vitesse v_B – 2ème Méthode

Le travail W de la force de frottement $\vec{C}$ de A à B est donné par :

$$W = \int_A^B \vec{C} \cdot \overrightarrow{dl} = -\int_A^B C_x\, dx = -\mu_d mg \cos\alpha \int_A^B dx.$$

Or, $\int_A^B dx = x_B - x_A = AB$. Donc : $W = -\mu_d mg \cos\alpha\, AB$.

- La vitesse v_B :

$$\Delta E_T = W.$$

$$\Delta E_T = \left(\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2\right) + (mgh_B - mgh_A) = W.$$

$$(h_B - h_A) = AB \sin\alpha.$$

$$v_B^2 = v_A^2 + \frac{2}{m}W - 2gAB\sin\alpha.$$

La Vitesse v_s

En quittant le plan incliné il n'y a plus de forces de frottements, donc :

- La vitesse v_B :

$\Delta E_T = 0.$

$\frac{1}{2}mv_s^2 + mgh_s = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B.$

Soit le sol le niveau référentiel de l'énergie potentielle gravitationnelle :

$$\frac{1}{2}mv_s^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B.$$

$$v_s^2 = v_B^2 + 2gh_B.$$

Ou utiliser la relation :

$$v_s^2 - v_B^2 = 2a'h_B. \qquad a' = g.$$