Université de Boumerdes
Faculté des sciences
Département de physique

UEF Physique 1
Sciences & Technologies
(1^{er} Semestre 2022-2023)

Cinématique du Point Matériel

Exercice 2

Les équations paramétriques, en coordonnées polaires, d'un mobile sont données par : $\begin{cases} r(t) = t \\ \theta(t) = \frac{\pi}{4}t \end{cases}$, t en seconde et r en mètre.

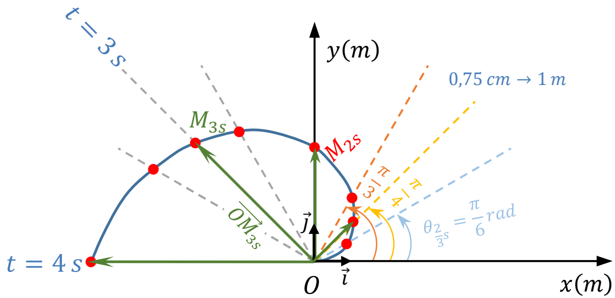
1. Tracer la trajectoire du mobile dans l'intervalle $[0; 4]_s$.
2. Déterminer, à l'instant t, les composantes polaires ; v_r et v_θ du vecteur vitesse $\vec{v}$ et a_r et a_θ du vecteur accélération $\vec{a}$.
3. Représenter les vecteurs vitesse et accélération à $t = 1\ s$. Préciser les échelles.
4. Déterminer les composantes intrinsèques a_t et a_n et le rayon de courbure ρ à $t = 1\ s$.

   Données : $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ et $a_\theta = r\ddot{\theta} \mp 2\dot{r}\dot{\theta}$.

La Trajectoire du Mobile

$$\begin{cases} r(t) = t \\ \theta(t) = \frac{\pi}{4} t \end{cases} \Longrightarrow \text{on donne à } t \text{ les valeurs : } 0\,;\, \frac{2}{3}\,;\, 1\,;\, \frac{4}{3}\,;\, 2\,;\, \frac{8}{3}\,;\, 3\,;\, \frac{10}{3}\,;\, 4.$$

Les valeurs respectives de θ sont donc : $0\,;\, \frac{\pi}{6}\,;\, \frac{\pi}{4}\,;\, \frac{\pi}{3}\,;\, \frac{\pi}{2}\,;\, \frac{2\pi}{3}\,;\, \frac{3\pi}{4}\,;\, \frac{5\pi}{6}\,;\, \pi.$



Les Composantes Polaires

$$\begin{cases} r(t) = t \\ \theta(t) = \frac{\pi}{4} t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{r}(t) = 1\, m/s \\ \dot{\theta}(t) = \frac{\pi}{4} rad/s \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \ddot{r}(t) = 0\, m/s^2 \\ \ddot{\theta}(t) = 0\, rad/s^2 \end{cases}.$$

$$v_r(t) = \dot{r} = 1\, m/s.$$

$$v_\theta(t) = r\dot{\theta} = \frac{\pi}{4} t.$$

$$\vec{v}(t) = \overrightarrow{e_r} + \frac{\pi}{4} t \overrightarrow{e_\theta}$$

$$a_r(t) = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0 - t\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = -\frac{\pi^2}{16} t.$$

$$a_\theta(t) = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 + 2 \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\vec{a}(t) = -\frac{\pi^2}{16} t \overrightarrow{e_r} + \frac{\pi}{2} \overrightarrow{e_\theta}$$

Représentation de $\overrightarrow{OM}$, $\vec{v}$ et $\vec{a}$

$$\vec{v}(t) = \overrightarrow{e_r} + \frac{\pi}{4} t \overrightarrow{e_\theta},\ \vec{a}(t) = -\frac{\pi^2}{16} t \overrightarrow{e_r} + \frac{\pi}{2} \overrightarrow{e_\theta}.$$

À $t = 1\,s$ on a :

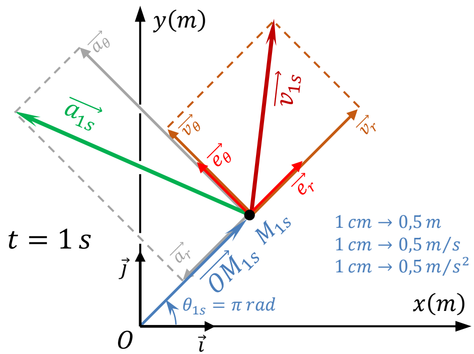
$\vec{v}(1) = \overrightarrow{e_r} + \frac{\pi}{4} \overrightarrow{e_\theta}$,

$\vec{a}(1) = -\frac{\pi^2}{16} \overrightarrow{e_r} + \frac{\pi}{2} \overrightarrow{e_\theta}$.

Aussi,

$\overrightarrow{OM}(1) = 1\overrightarrow{e_r}$,

$\theta(1) = \frac{\pi}{4}(rad)$.



Les Composantes Intrinsèques a_t et a_n et ρ

$$\vec{a}(t) = a_t\overrightarrow{e_t} + a_n\overrightarrow{e_n}.\ \text{Avec : } a_t = \frac{dv}{dt} \text{ et } a_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

$$\vec{v}(t) = \overrightarrow{e_r} + \frac{\pi}{4}t\overrightarrow{e_\theta} \text{ donc } v(t) = \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{16}t^2}.\ \text{D'où :}$$

$$a_t(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}\frac{2\frac{\pi^2}{16}t}{\sqrt{1+\frac{\pi^2}{16}t^2}} = \frac{\frac{\pi^2}{16}}{\sqrt{1+\frac{\pi^2}{16}}} \approx 0{,}48\, m/s^2.$$

$$\text{Or, } \vec{a}(t) = -\frac{\pi^2}{16}t\overrightarrow{e_r} + \frac{\pi}{2}\overrightarrow{e_\theta} \text{ donc } a(1) = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\pi^2}{64} + 1} \approx 1{,}69\, m/s^2.$$

$$\text{Aussi, } a^2(1) = a_t^2(1) + a_n^2(1) \text{ donc : } a_n(1) \approx 2{,}62\, m/s^2$$

$$v(1) = \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{16}} \text{ donc } \rho(1) = \frac{v^2(1)}{a_n(1)} \approx 0{,}62\, m.$$