Étude des Variations de y en Fonction de x

Énoncé

Les mesures, de la variable dépendante[1] y en fonction de la variable indépendante x, sont reproduites sur le tableau suivant :

$y(u)$	03,0	09,0	15,8	21,4	25,9	32,0	36,9	42,3	48,3	53,0
$x(u')$	1,09	1,67	2,14	2,49	2,79	3,06	3,31	3,55	3,76	3,97
$x^2(u'^2)$										

1. Compléter le tableau ci-dessus. $(0{,}5pt.)$
2. Tracer la courbe $y = f(x^2)$ sachant que $\Delta y = 0{,}2\,u$ et $\Delta x = 0{,}05\,u'$. Conclure. $G\ (2pts.)$; $\Delta(x^2)\ (0{,}5pt.)$; $R.Inc.(1pt.)$; $Cl(0{,}5pt.)$

$x(u')$	1,09	1,67	2,14	2,49	2,79	3,06	3,31	3,55	3,76	3,97
$\Delta(x^2)$										

3. Calculer la pente a de $y = f(x^2)$ ainsi que son incertitude absolue. $a\ (0{,}5pt.)$; $USI\ (0{,}5pt.)$; $\Delta a\ \ Anal.(0{,}75pt.)$; $\Delta a\ A.N.(0{,}5pt.)$
4. Quelle est la relation théorique reliant y à x. $(0{,}5pt.)$ $y = 2k^2x^2$.[2]
5. Que représente la pente a ? $(0{,}5pt.)$
6. Déterminer la valeur de k et ses incertitudes relative et absolue. $k\ (0{,}5pt.)$; $USI\ (0{,}5pt.)$; $\Delta k\ \ Anal.(0{,}5pt.)$; $\Delta k\ A.N.(0{,}25pt.)$
7. Conclusion. $(1pt.)$

[1] Les variables, dépendante et indépendante, sont deux grandeurs physiques mesurables reliées entre eux par une relation à déterminer.

[2] C'est une relation qui n'est pas réelle, elle est mise au point pour cet énoncé seulement. C'est pourquoi elle est écrite juste après la question, sinon il est rare que l'énoncé comporte la relation théorique.

Le Tableau

$y(u)$	03,0	09,0	15,8	21,4	25,9	32,0	36,9	42,3	48,3	53,0
$x(u')$	1,09	1,67	2,14	2,49	2,79	3,06	3,31	3,55	3,76	3,97
$x^2(u'^2)$	1,19	2,78	4,58	6,20	7,78	9,36	10,95	12,60	14,14	15,76

Le Graphe – 1 – Calcul de $\Delta(x^2)$

Pour déterminer l'incertitude relative $\frac{\Delta(x^2)}{x^2}$ on procède comme suit :

On prend la relation triviale $(x^2) = x^2$, dont le logarithme donne :

$$\ln(x^2) = \ln x^2 = 2\ln x.$$

Puis, on détermine la différentielle de cette équation :

$$d\ln(x^2) = d\{2\ln x\} = 2\,d\ln x.$$

En utilisant le fait que : $d\ln z = \frac{dz}{z}$, notre équation devient :

$$\frac{d(x^2)}{(x^2)} = 2\frac{dx}{x}.$$

On passe aux petites variations, en échangeant d par Δ :

$$\frac{\Delta(x^2)}{(x^2)} = 2\frac{\Delta x}{x}. \qquad \Longrightarrow \Delta(x^2) = 2(x^2)\frac{\Delta x}{x} = 2x\,\Delta x$$

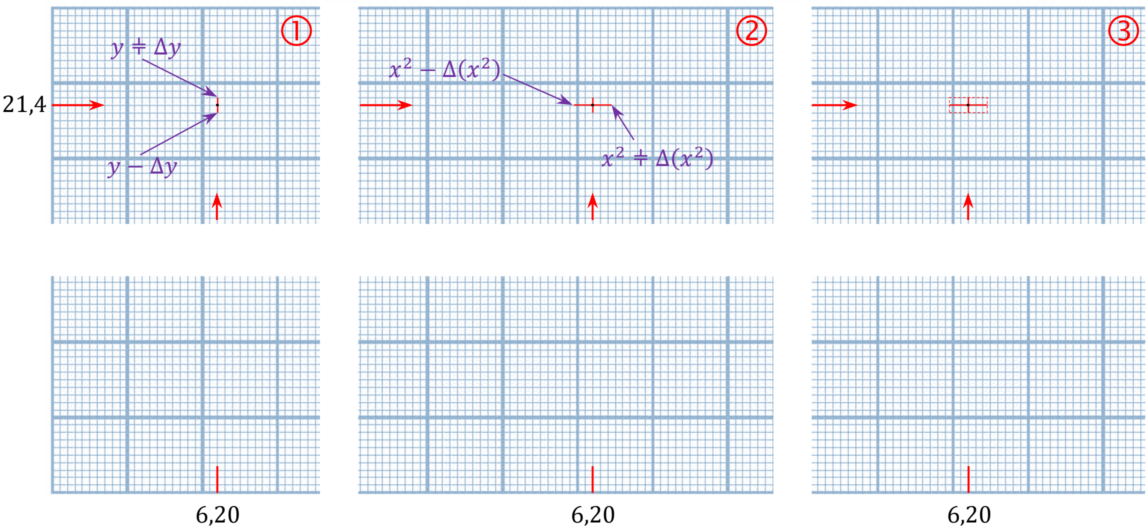
Le Graphe – 2 – Δy et $\Delta(x^2)$ à l'Échelle

On a : $\Delta x = 0{,}05\, u'$.
Ainsi que $\Delta(x^2) = 2x\, \Delta x$.
x^2 et $\Delta(x^2)$ ont la même unité et la même échelle : $1\, cm \rightarrow 1\, {u'}^2$

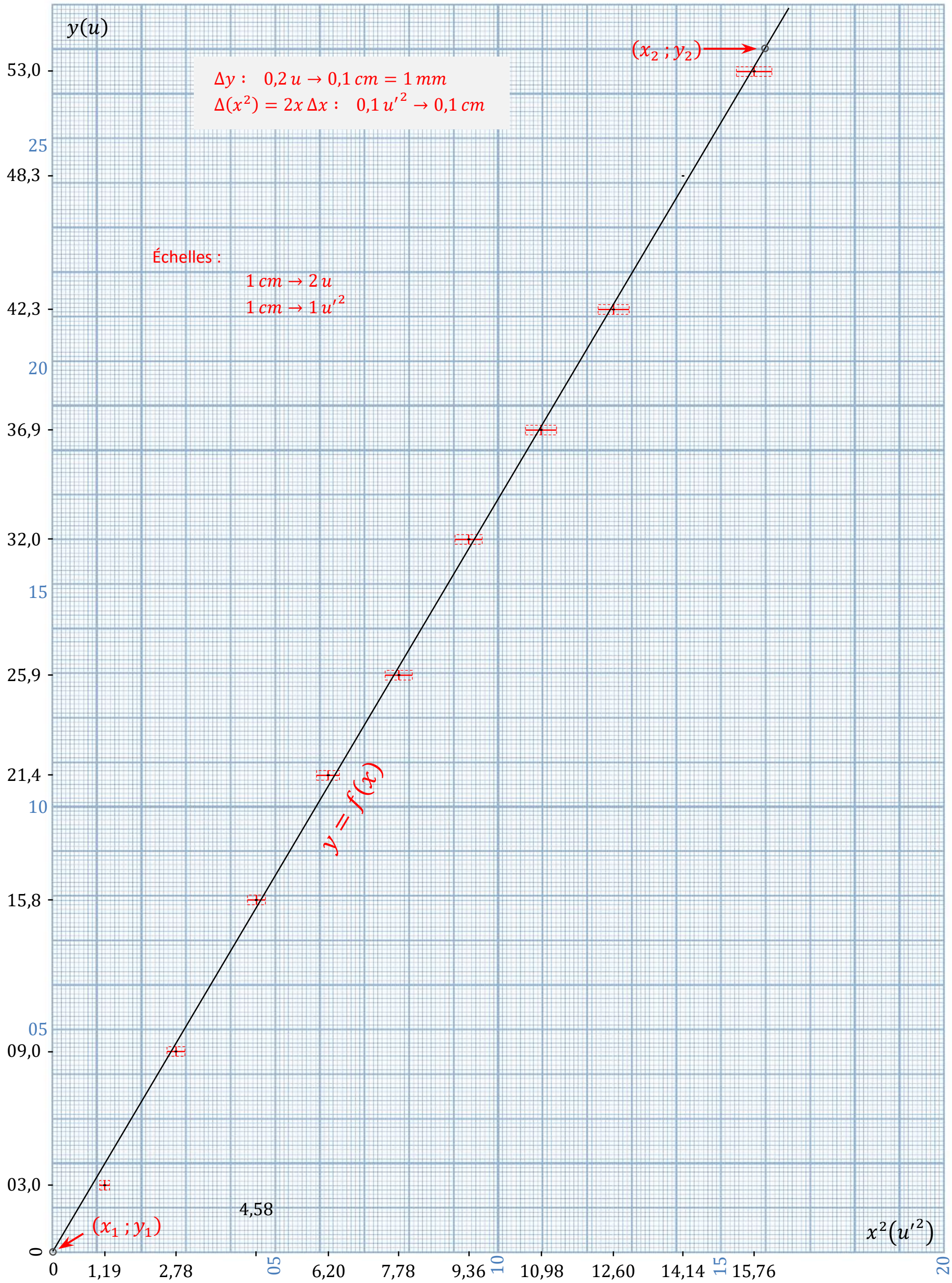
$x(u')$	1,09	1,67	2,14	2,49	2,79	3,06	3,31	3,55	3,76	3,97
$\Delta x^2({u'}^2)$	0,11	0,17	0,21	0,25	0,28	0,31	0,33	0,36	0,38	0,40
Gr. $\rightarrow mm$	1	2	2	2,5	3	3	3,5	3,5	4	4

On a : $\Delta y = 0{,}2\, u$. Sur le graphe $\Delta y = 1\, mm$ car :
y et Δy ont la même unité et la même échelle : $1\, cm \rightarrow 2\, u$

Le Graphe – 3 – Rectangle d’Incertitude



Le Graphe – 4 – Le Tracé



Le Graphe – 5 – Conclusion

Le Graphe de $y = f(x^2)$ est :

Une Droite Linéaire

qui passe par l'origine, d'équation :

$$y = ax^2.$$

Où, 'a' est la pente de cette droite.

Calcul de la Pente et son Incertitude Absolue

On calcule la pente a par la relation : $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2^2 - x_1^2} = \frac{54-0}{16-0} = 3{,}375\,\frac{u}{u'^2}$.

Où, on a choisi, sur la droite, l'origine et un point très éloigné.

De la relation $y = ax^2$, on peut écrire que : $a = \frac{y}{x^2}$, d'où :

$$\ln a = \ln y - \ln x^2 = \ln y - 2\ln x. \text{ Donc :}$$

$$d\ln a = d\ln y - 2\,d\ln x \Longrightarrow \frac{da}{a} = \frac{dy}{y} - 2\,\frac{dx}{x}.$$

Enfin, on passe de d à Δ et on échange $-$ par $\mp$:

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta y}{y} \mp 2\,\frac{\Delta x}{x}. \Longrightarrow \Delta a = a\left(\frac{\Delta y}{y} \mp 2\,\frac{\Delta x}{x}\right) = 3{,}375\left(\frac{0{,}2}{54} \mp 2\,\frac{0{,}05}{4}\right)$$

$$\Delta a \approx 0{,}097\,\frac{u}{u'^2}.$$

Identification

On sait que, '*théoriquement*', y est reliée à x par : $y = 2k^2x^2$.

Du ***résultat expérimental*** on a : $y = ax^2$.

Par identification, on trouve que :

$$a = 2k^2.$$

D'où, a représente : ……………[1].

[1] Cette conclusion dépend de la nature physique de k.

La Valeur de k et ses Incertitudes Absolue et Relative

On a : $a = 2k^2 \Longrightarrow k = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

$$k = 1{,}299 \, \frac{u^{\frac{1}{2}}}{u'}.$$

De la relation $k = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$, on a : $k = \frac{a^{1/2}}{\sqrt{2}}$, d'où :

$$\ln k = \frac{1}{2}\ln a - \ln\sqrt{2}. \text{ Donc :}$$

$$d\ln k = \frac{1}{2}d\ln a - d\ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}d\ln a \Longrightarrow \frac{dk}{k} = \frac{1}{2}\frac{da}{a}.$$

Enfin :

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{1}{2}\frac{\Delta a}{a} = \frac{1}{2}\frac{0{,}097}{3{,}375} = 1{,}44\,\% \Longrightarrow \Delta k = \frac{1}{2}k\frac{\Delta a}{a} \approx 0{,}019\,\frac{u^{\frac{1}{2}}}{u'}.$$

Conclusion

On conclut que cette expérience représente une mesure indirecte de la constante k. Et on discute son résultat à l'intérieur de l'intervalle :

$$[k - \Delta k; k \mp \Delta k].$$

La nature physique de k peut toujours mener à d'autres conclusions.