Cinématique du Point Matériel

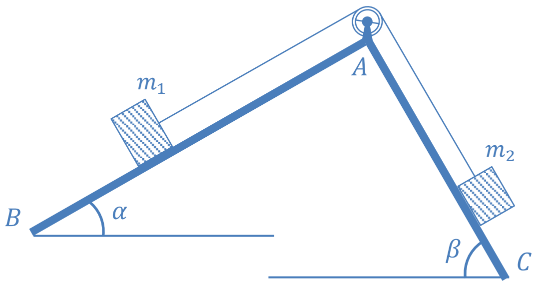
Exercice [1]

I. Deux masses m_1 et $m_2 = 2m_1$, reliées par un fil inextensible à travers une poulie, sont placées sur deux pistes différentes, AB et AC, inclinées respectivement par rapport à l'horizontale de $\alpha = 30°$ et $\beta = 60°$. Les frottements sont caractérisés par les coefficients de frottement statiques μ_{s1} entre m_1 et la piste AB et $\mu_{s2} = \sqrt{3}/4$ entre m_2 et la piste AC (figure ci-dessous). Les masses du fil et de la poulie sont négligeables.

1. Représenter les forces agissant sur chaque masse.
2. Écrire la relation fondamentale de la dynamique pour chaque masse avant la rupture d'équilibre.
3. Calculer la valeur du coefficient de frottement statique μ_{s1} de la piste AB nécessaire à la rupture d'équilibre.

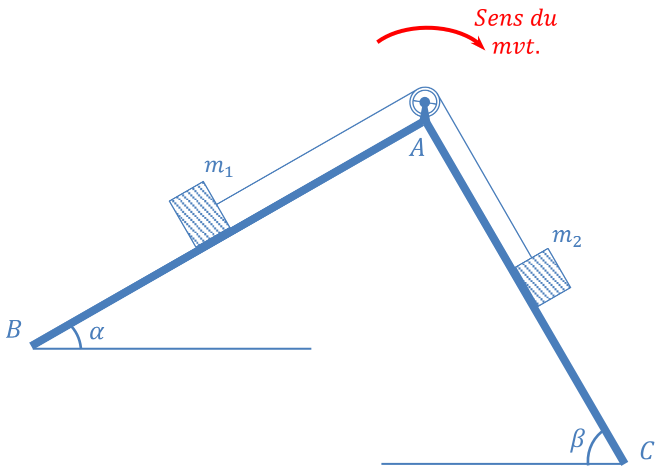
II. Les coefficients de frottement de la piste AB sont : le coefficient statique $\mu_s = 0{,}3$ et dynamique $\mu_{d1} = 0{,}2$.

1. Indiquer le sens du mouvement des deux masses.
2. Écrire les équations de la dynamique pour chaque masse.
3. Calculer l'accélération des deux masses, sachant que $\mu_{d2} = 0{,}4$.

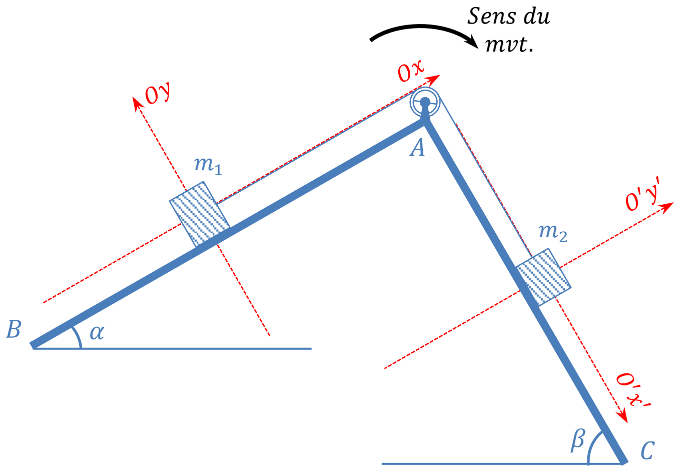


[1] Exercice 2, Rattrapage – STH 2015-2016 (UMBB).

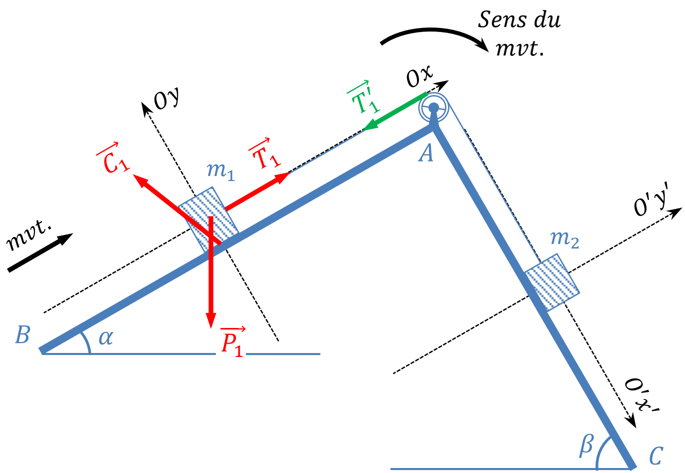
Représentation des Forces – a



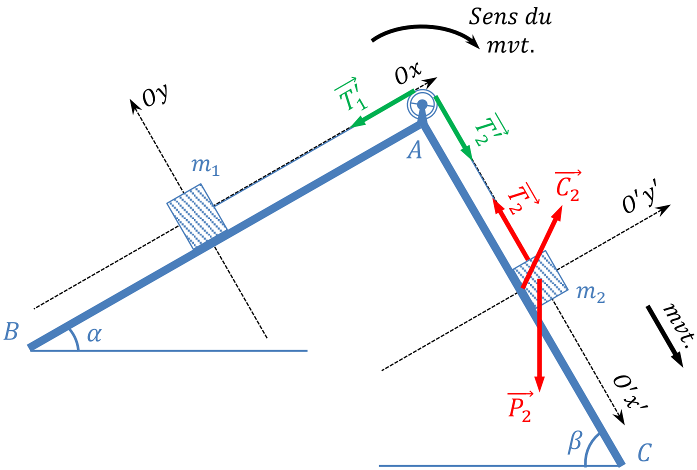
Représentation des Forces – *b*



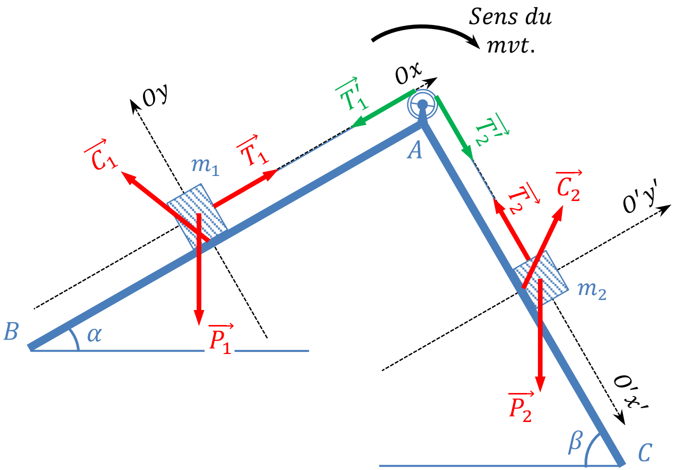
Représentation des Forces – *c*



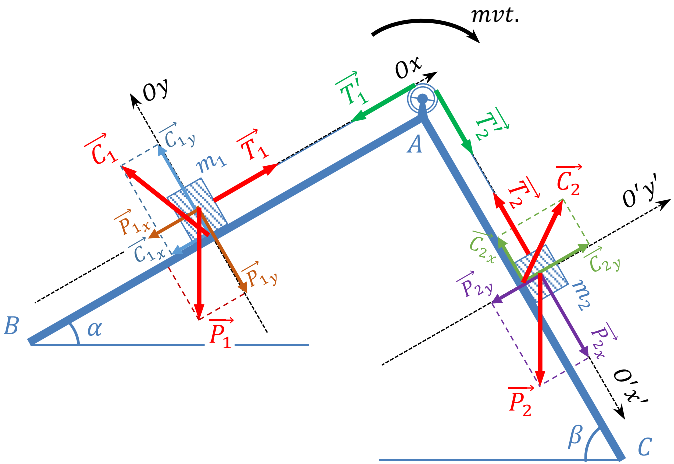
Représentation des Forces – *d*



Représentation des Forces – *e*



Représentation des Forces – *f*



Les Relations Fondamentales de la Dynamique

μ_{s1} nécessaire pour la rupture de l'équilibre : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$.

m_1 :

$$\overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{C_1} + \overrightarrow{P_1} = \vec{0}. \quad ①$$

m_2 :

$$\overrightarrow{T_2} + \overrightarrow{C_2} + \overrightarrow{P_2} = \vec{0}. \quad ②$$

Le Coefficient de Frottement Statique μ_{s1}

$m_1 : \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{C_1} + \overrightarrow{P_1} = \vec{0} \rightarrow$ $\quad Ox : T_1 - C_{1_x} - P_{1_x} = 0.$

$Oy : C_{1_y} = P_{1_y}$ avec $C_{1_x} = \mu_{s1} C_{1_y}.$

$$T_1 - \mu_{s1} P_{1_y} - P_{1_x} = 0. \qquad ①$$

$m_2 : \overrightarrow{T_2} + \overrightarrow{C_2} + \overrightarrow{P_2} = \vec{0} \rightarrow$ $\quad O'x' : P_{2_x} - T_2 - C_{2_x} = 0.$

$O'y' : C_{2_y} = P_{2_y}$ avec $C_{2_x} = \mu_{s2} C_{2_y}.$

$$P_{2_x} - T_2 - \mu_{s2} P_{2_y} = 0. \qquad ②$$

$m_{fil} \sim 0 \rightarrow \begin{cases} T_1 = T_1' \\ T_2 = T_2' \end{cases}$ et $m_{poulie} \sim 0 \rightarrow T_1' = T_2'. \Longrightarrow T_1 = T_2.$

Ainsi, ① + ② $\Longrightarrow$ $\quad P_{2_x} - \mu_{s2} P_{2_y} - \mu_{s1} P_{1_y} - P_{1_x} = 0.$

Le Coefficient de Frottement Statique $\mu_{s1} - b$

$$m_1 : \widehat{\overrightarrow{P_1};\overrightarrow{P_{1_y}}} = \alpha \quad car \qquad \overrightarrow{P_1} \perp Horizontale,$$

$$\overrightarrow{P_{1_y}} \perp AB.$$

$$P_{1_x} = P_1 \sin\alpha \text{ et } P_{1_y} = P_1 \cos\alpha.$$

$$m_2 : \widehat{\overrightarrow{P_2};\overrightarrow{P_{2_y}}} = \beta \quad car \qquad \overrightarrow{P_2} \perp Horizontale,$$

$$\overrightarrow{P_{2_y}} \perp AC.$$

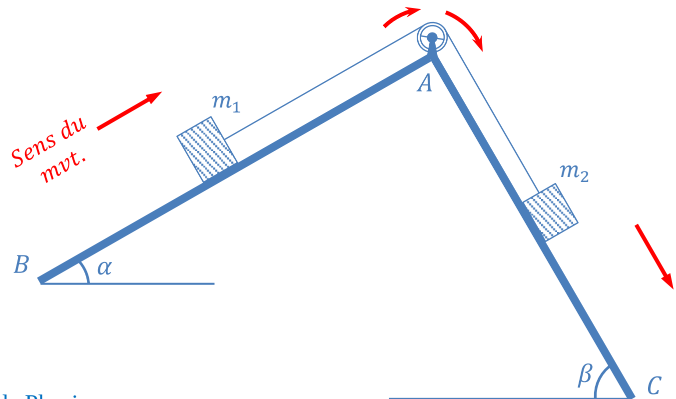
$$P_{2_x} = P_2 \sin\beta \text{ et } P_{2_y} = P_2 \cos\beta.$$

$$\Longrightarrow \qquad \mu_{s1} = \frac{m_2 \sin\beta - \mu_{s2} m_2 \cos\beta - m_1 \sin\alpha}{m_1 \cos\alpha} \approx 0{,}92.$$

Sens du Mouvement

Comme la nouvelle valeur du coefficient $\mu_{s1} = 0{,}3 < 0{,}92$

La piste AB présente alors des frottements inférieurs à ceux correspondants à la première valeur 0,92, m_2 entrainera donc m_1



Les équations de la dynamique

$$\mu_{s1} = 0{,}3 \Longrightarrow \text{Mouvement} \Longrightarrow \sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

$$m_1 : \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{C_1} + \overrightarrow{P_1} = m_1 a_1 \rightarrow$$

$$Ox : T_1 - C_{1_x} - P_{1_x} = m_1 a_1.$$

$$Oy \text{ (pas de mvt)} : C_{1_y} = P_{1_y} \text{ avec } C_{1_x} = \mu_{d1} C_{1_y}.$$

$$T_1 - \mu_{d1} P_{1_y} - P_{1_x} = m_1 a_1. \qquad ①$$

$$m_2 : \overrightarrow{T_2} + \overrightarrow{C_2} + \overrightarrow{P_2} = m_2 \overrightarrow{a_2} \rightarrow$$

$$O'x' : P_{2_x} - T_2 - C_{2_x} = m_2 a_2.$$

$$O'y' \text{ (pas de mvt)} : C_{2_y} = P_{2_y} \text{ avec } C_{2_x} = \mu_{d2} C_{2_y}.$$

$$P_{2_x} - T_2 - \mu_{d2} P_{2_y} = m_2 a_2. \qquad ②$$

L'Accélération a

$$T_1 - \mu_{d1} m_1 g \cos\alpha - m_1 g \sin\alpha = m_1 a_1. \qquad ①$$

$$m_2 g \sin\beta - T_2 - \mu_{d2} m_2 g \cos\beta = m_2 a_2. \qquad ②$$

$$m_{fil} \sim 0 \text{ et } m_{poulie} \sim 0 \Longrightarrow \quad T_1 = T_2$$

Fil inextensible : $\Longrightarrow \qquad a_1 = a_2 = a.$

$$① \mp ② \; m_2 g \sin\beta - \mu_{d2} m_2 g \cos\beta - \mu_{d1} m_1 g \cos\alpha - m_1 g \sin\alpha = (m_1 \mp m_2) a.$$

$$a = g \frac{m_2(\sin\beta - \mu_{d2}\cos\beta) - m_1(\mu_{d1}\cos\alpha \mp \sin\alpha)}{m_1 \mp m_2} \approx 2{,}15\, m/s^2.$$