

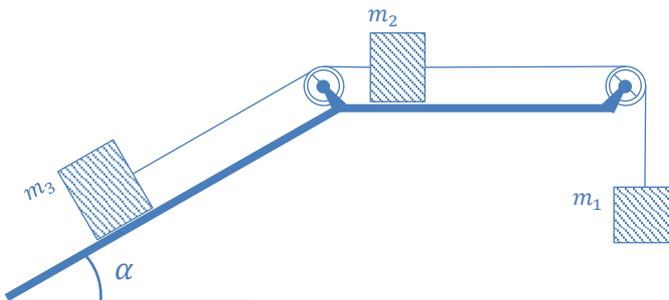
Systeme Dynamique

Exercice ¹

On considère le système dynamique ci-dessous, dans lequel le plan incliné fait un angle α par rapport à l'horizontale. Le frottement entre m_2 et le plan horizontal est caractérisé par les coefficients de frottements μ_{s2} et μ_{g2} . Celui entre m_3 et le plan incliné est caractérisé par les coefficients de frottements μ_{s3} et μ_{g3} . Les fils sont inextensibles et leurs masses ainsi que celles des poulies sont supposées négligeables.

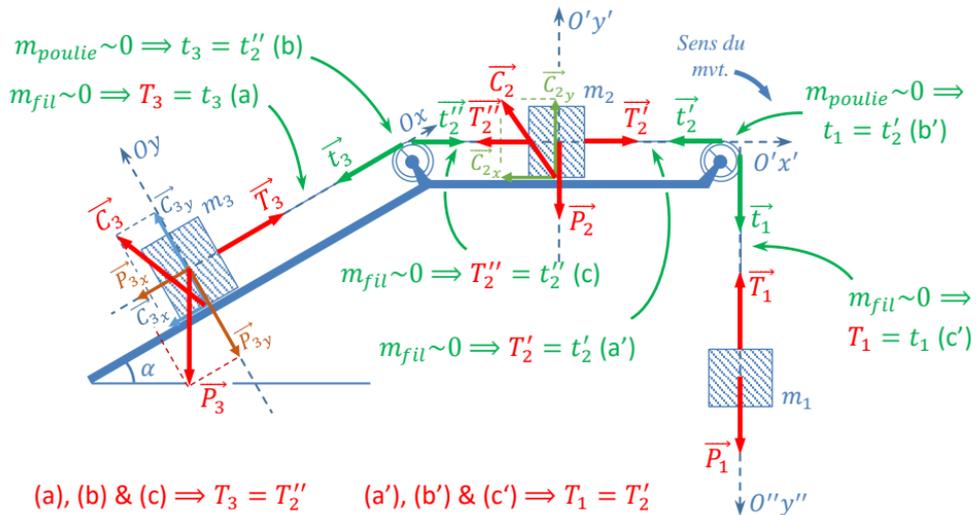
1. Quelle est la masse minimale de m_1 , qui lui permet d'entraîner le système ?
2. On prend la masse $m_1 = 3,5 \text{ kg}$ et on abandonne le système sans vitesse initiale. Calculer l'accélération a du système.
3. Calculer les tensions des fils.

Données : $m_2 = m_3 = 2 \text{ kg}$, $\mu_{s2} = 0,3$, $\mu_{g2} = 0,25$, $\mu_{s3} = \sqrt{3}/3$,
 $\mu_{g3} = \sqrt{3}/4$, $\alpha = \pi/6$.



¹ Exercice 8, Série 3 (Modifié) – SM 2019-2020 (UMBB).

Représentation des Forces



La Masse minimale m_1

m_1 nécessaire pour **entraîner** le système et l'arracher de l'**équilibre** : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$.

$$m_1 : \vec{T}_1 \mp \vec{P}_1 = \vec{0} \rightarrow O''y'' : P_1 - T_1 = 0. \quad \textcircled{1}$$

$$m_2 : \vec{T}_2'' \mp \vec{T}_2' \mp \vec{C}_2 \mp \vec{P}_2 = \vec{0} \rightarrow O'x' : T_2' - C_{2x} - T_2'' = 0. \quad \textcircled{2}$$
$$O'y' : C_{2y} = P_2 \text{ avec } C_{2x} = \mu_{s2} C_{2y}.$$

$$m_3 : \vec{T}_3 \mp \vec{C}_3 \mp \vec{P}_3 = \vec{0} \rightarrow Ox : T_3 - P_{3x} - C_{3x} = 0. \quad \textcircled{3}$$
$$Oy : C_{3y} = P_{3y} \text{ avec } C_{3x} = \mu_{s3} C_{3y}.$$

Fils et poulies de masses $\sim 0 \rightarrow T_1 = T_2' \ \& \ T_2'' = T_3$.

Ainsi, $\textcircled{1} \mp \textcircled{2} \mp \textcircled{3} \Rightarrow m_1 = m_2 \mu_{s2} \mp m_3 (\sin \alpha \mp \mu_{s3} \cos \alpha) = 3,1 \text{ kg}$.



L'Accélération a

$$m_1 = 3,5 \text{ kg} \Rightarrow \text{Mouvement} \Rightarrow \sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

$$m_1 : \vec{T}_1 \mp \vec{P}_1 = m_1 \vec{a}_1 \rightarrow O''y'' : P_1 - T_1 = m_1 a_1. \quad \textcircled{1}$$

$$m_2 : \vec{T}_2'' \mp \vec{T}_2' \mp \vec{C}_2 \mp \vec{P}_2 = m_2 \vec{a}_2 \rightarrow O'x' : T_2' - C_{2x} - T_2'' = m_2 a_2. \quad \textcircled{2}$$

$O'y' \text{ (Pas de mvt.)} : C_{2y} = P_2 \text{ avec } C_{2x}/C_{2y} = \mu_{g2} \Rightarrow C_{2x} = \mu_{g2} C_{2y}.$

$$m_3 : \vec{T}_3 \mp \vec{C}_3 \mp \vec{P}_3 = m_3 \vec{a}_3 \rightarrow Ox : T_3 - P_{3x} - C_{3x} = m_3 a_3. \quad \textcircled{3}$$

$Oy \text{ (Pas de mvt.)} : C_{3y} = P_{3y} \text{ avec } C_{3x}/C_{3y} = \mu_{g3} \Rightarrow C_{3x} = \mu_{g3} C_{3y}.$

Fil inextensible $\Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = a,$

$m_f \sim 0 ; m_p \sim 0 \Rightarrow T_1 = T_2' \& T_2'' = T_3. \quad \text{D'où, } \textcircled{1} \mp \textcircled{2} \mp \textcircled{3} \Rightarrow :$

$$a = g \{ m_1 - \mu_{g2} m_2 - m_3 (\sin \alpha \mp \mu_{g3} \cos \alpha) \} / (m_1 \mp m_2 \mp m_3) \approx 1,63 \text{ m/s}^2.$$



Les Tensions

$$\textcircled{1} : P_1 - T_1 = m_1 a \Rightarrow$$

$$T_1 = m_1(g - a).$$

$$T_1 \approx 28,62 \text{ N}.$$

$$\textcircled{3} : \begin{cases} T_3 - P_{3x} - C_{3x} = m_3 a \\ C_{3x} = \mu_{g3} m_3 g \cos \alpha \end{cases} \Rightarrow$$

$$T_3 = m_3 \{ a \mp g(\sin \alpha \mp \mu_{g3} \cos \alpha) \}.$$

$$T_3 \approx 27,76 \text{ N}.$$

Avec :

$$\begin{cases} T'_2 = T_1 \\ T''_2 = T_3 \end{cases}.$$