Coordonnées Polaires

Exercice [1]

Les équations paramétriques d'un mobile en coordonnées polaires $r(t)$ et $\theta(t)$ sont données par :

$$\begin{cases} r(t) = \frac{t}{2}(m) \\ \theta(t) = \frac{\pi t}{4}(rad) \end{cases} ; t \geq 0 \text{ et } t \text{ en seconde.}$$

1. Tracer la trajectoire du mobile dans l'intervalle de temps $[0; 4]_s$.
2. Déterminer les composantes polaires du vecteur vitesse (v_r et v_θ) et du vecteur accélération (a_r et a_θ) à l'instant t.
   On donne : $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$;
   $a_\theta = r\ddot{\theta} \mp 2\dot{r}\dot{\theta}$.
3. Représenter, dans le repère xOy, les vecteurs : $\overrightarrow{OM}$, $\vec{v}$ et $\vec{a}$ à $t = 1\,s$.
   Échelles : $1\,cm \to 0{,}1\,m$, $1\,cm \to 0{,}25\,m/s$ et $1\,cm \to 0{,}25\,m/s^2$.
4. Calculer les composantes a_t et a_n et le rayon de courbure ρ à $t = 1\,s$.
5. Représenter dans le repère intrinsèque, les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{a}$ à partir de leurs composantes intrinsèques à $t = 1\,s$.
6. Donner, en coordonnées rectangulaires, les composantes de $\overrightarrow{OM}$ à l'instant t.
7. Déterminer les composantes rectangulaires du vecteur vitesse (v_x et v_y) et du vecteur accélération (a_x et a_y) à l'instant t.
8. Représenter, dans le repère rectangulaire, les vecteurs : $\overrightarrow{OM}$, $\vec{v}$ et $\vec{a}$ à partir de leurs composantes rectangulaires à $t = 1\,s$.

[1] Exercice 17 modifié, Série 2 – SM 2019-2020 (UMBB).

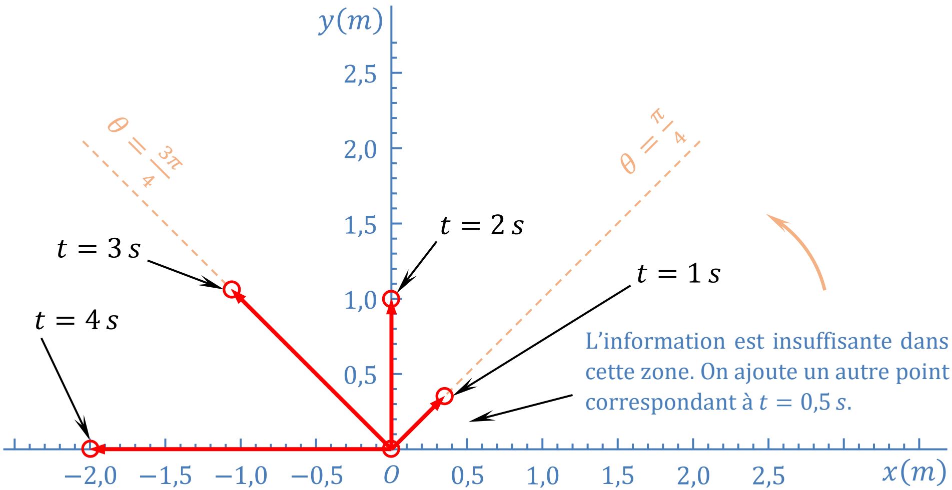
La Trajectoire – Le Tableau

Pour tracer la trajectoire du mobile dans l'intervalle de temps $[0;4]_s$, on donne à t des valeurs comprises entre $0\,s$ et $4\,s$. Puis, on calcule leurs coordonnées polaires respectives r et θ en utilisant les équations paramétriques :

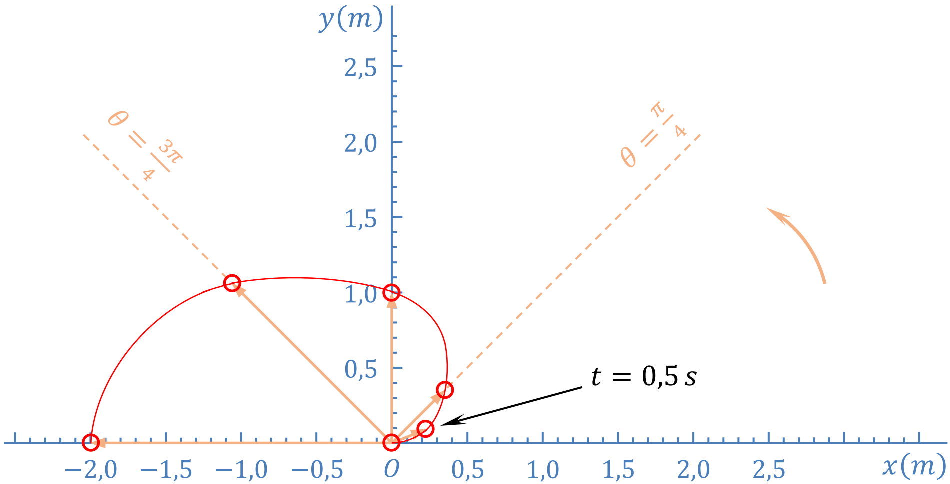
$$\begin{cases} r(t) = \frac{t}{2}(m) \\ \theta(t) = \frac{\pi t}{4}(rad) \end{cases} ;\ t \geq 0 \text{ et } t \text{ en seconde.}$$

$t(s)$	0	1	2	3	4	0,5
$r(m)$	0	0,5	1,0	1,5	2,0	0,25
$\theta(rad)$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{\pi}{8}$

La Trajectoire – Les Points



La Trajectoire – Le Tracé



$\overrightarrow{OM}$, $\vec{v}(t)$ et $\vec{a}(t)$ – Coordonnées Polaires

$$\begin{cases} r(t) = t/2\,(m) \\ \theta(t) = (\pi t)/4\,(rad) \end{cases};\ \begin{cases} \dot{r} = 1/2\,m/s \\ \dot{\theta} = \pi/4\,rad/s \end{cases};\ \begin{cases} \ddot{r} = 0\,m/s^2 \\ \ddot{\theta} = 0\,rad/s^2 \end{cases}.$$

$$\overrightarrow{OM} = r(t)\,\overrightarrow{e_r} = \frac{t}{2}\overrightarrow{e_r}.$$

$$\vec{v}(t) : \begin{cases} v_r(t) = \dot{r} = 1/2\,m/s \\ v_\theta(t) = r\dot{\theta} = \frac{t}{2}\frac{\pi}{4}(m/s) \end{cases},\ \text{donc :}\ \vec{v}(t) = \frac{1}{2}\overrightarrow{e_r} \mp \frac{\pi t}{8}\overrightarrow{e_\theta}.$$

$$\vec{a}(t) : \begin{cases} a_r(t) = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0 - \frac{t}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = -\frac{\pi^2 t}{32}m/s^2 \\ a_\theta(t) = r\ddot{\theta} \mp 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \mp 2\dot{r}\dot{\theta} = 2\frac{1}{2}\frac{\pi}{4}m/s^2 \end{cases} \Longrightarrow \vec{a}(t) = \frac{\pi}{4}\overrightarrow{e_\theta} - \frac{\pi^2 t}{32}\overrightarrow{e_r}.$$

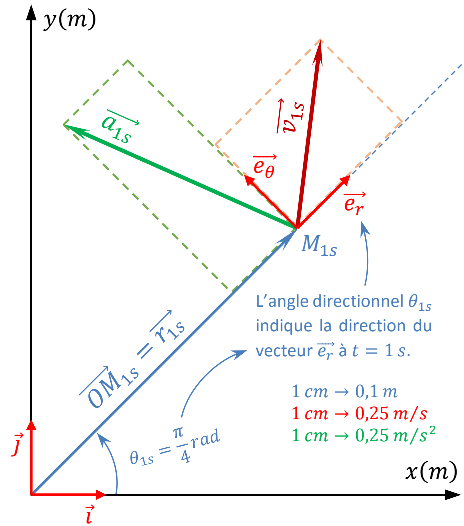
$\overrightarrow{OM}$, $\vec{v}(t)$ et $\vec{a}(t)$ à $t = 1\,s$

(Polaires)

À $t = 1\,s : \begin{cases} r(1s) = 1/2\,(m) \\ \theta(1s) = \pi/4\,(rad) \end{cases}$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM}_{1s} = r(1s)\,\overrightarrow{e_r} = \frac{1}{2}\overrightarrow{e_r} \\ \vec{v}(1s) = \frac{1}{2}\overrightarrow{e_r} \mp \frac{\pi}{8}\overrightarrow{e_\theta} \\ \vec{a}(1s) = -\frac{\pi^2}{32}\overrightarrow{e_r} \mp \frac{\pi}{4}\overrightarrow{e_\theta} \end{cases}.$$

$\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{OM}$ ont toujours même direction.
$\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{e_r}$ sont perpendiculaires.



$a_t,\, a_n$ et ρ à $t = 1\, s$

On sait que $a_t(t) = \frac{d\,v(t)}{dt}$. Or, $\vec{v}(t) = \frac{1}{2}\overrightarrow{e_r} + \frac{\pi t}{8}\overrightarrow{e_\theta} \Longrightarrow v(t) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\pi^2 t^2}{16}\right)^{1/2}$.

Donc : $a_t(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(1 + \frac{\pi^2 t^2}{16}\right)^{1/2} = \frac{\pi^2 t}{32}\left(1 + \frac{\pi^2 t^2}{16}\right)^{-1/2}$.

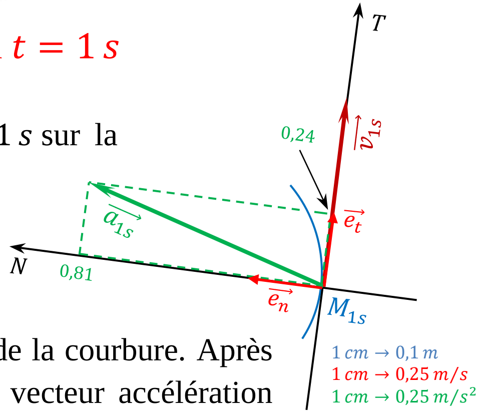
$$\text{À} = 1\, s \Longrightarrow a_t(1s) = \frac{\pi^2}{32}\left(1 + \frac{\pi^2}{16}\right)^{-1/2} \approx 0{,}24\, m/s^2.$$

$$\vec{a}(t) = -\frac{\pi^2}{32}\overrightarrow{e_r} + \frac{\pi}{4}\overrightarrow{e_\theta} \Longrightarrow a(t) = \left(a_r^2 + a_\theta^2\right)^{1/2} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi^2}{64} + 1\right)^{1/2} \approx 0{,}84\, m/s^2.$$

$$a_n^2(1s) = a^2(1s) - a_t^2(1s). \Longrightarrow a_n(1s) \approx 0{,}81\, m/s^2.$$

$$a_n(t) = \frac{v^2(t)}{\rho(t)} \Longrightarrow \rho(t) = \frac{v^2(t)}{a_n(t)}.\ \text{À } t = 1\, s \Longrightarrow \rho(1s) = \frac{v^2(1)}{a_n(1)} \approx \frac{0{,}63^2}{0{,}81} \approx 0{,}49\, m.$$

$\vec{v}(t)$ et $\vec{a}(t)$ Intrinsèques à $t = 1\,s$



Soit M_{1s} le point corespondant à $t = 1\,s$ sur la trajectoire. Au point M_{1s}, on trace la tangente à la trajectoire. Cette tangente porte le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_{1s}}$, l'axe T et $\overrightarrow{e_t}$. D'autre part, $\overrightarrow{e_n}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{e_t}$. Aussi, $\overrightarrow{e_n}$ est dirigé vers le centre de la courbure. Après quoi on représente les composantes du vecteur accélération $\overrightarrow{a_{1s}}$. Telles que :

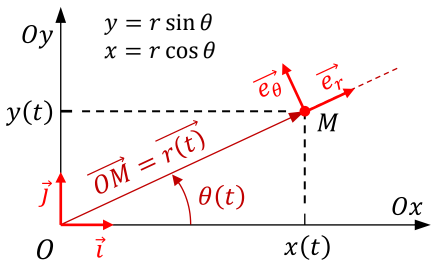
$$\vec{a}(1s) = a_t(1s)\,\overrightarrow{e_t} \mp a_n(1s)\,\overrightarrow{e_n} \text{ avec : } \begin{cases} a_t(1s) \approx 0,24\,m/s^2 \\ a_n(1s) \approx 0,81\,m/s^2 \end{cases}.$$

$$\vec{v}(1s) = v(1s)\,\overrightarrow{e_t} \text{ avec : } v(1s) \approx 0,63\,m/s.$$

$\overrightarrow{OM}$ – Coordonnées Rectangulaires

$$\begin{cases} r(t) = \frac{t}{2}\,(m) \\ \theta(t) = \frac{\pi t}{4}\,(rad) \end{cases},$$

$$\text{avec} \begin{cases} x(t) = r(t)\cos[\theta(t)] = \frac{t}{2}\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right) \\ y(t) = r(t)\sin[\theta(t)] = \frac{t}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{4}\right) \end{cases},$$



Donc :

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} = \frac{t}{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)\vec{j}\right\}.$$

$\vec{v}$ et $\vec{a}$ en Coordonnées Rectangulaires

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t}{2}\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right) \\ y(t) = \frac{t}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{4}\right) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = v_x = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right) - \frac{t}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi t}{4}\right) \\ \dot{y}(t) = v_y = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{4}\right) \mp \frac{t}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right) \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = a_x = -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi t}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi t}{4}\right) - \frac{t}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right) \\ \ddot{y}(t) = a_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right) \mp \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right) - \frac{t}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\sin\left(\frac{\pi t}{4}\right) \end{cases}.$$

Avec : $\vec{v} = v_x\vec{\imath} \mp v_y\vec{\jmath}.$

$$\vec{a} = a_x\vec{\imath} \mp a_y\vec{\jmath}.$$

$\overrightarrow{OM}$, $\vec{v}$ et $\vec{a}$ en Coordonnées Rectangulaires à $t = 1\,s$

Dans ce cas, à $t = 1\,s$, le point M_{1s} est déterminé par ces coordonnées x_{1s} et y_{1s} :

$$\begin{cases} x_{1s} = x(1) = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}35\,m \\ y_{1s} = y(1) = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}35\,m \end{cases}.$$

Avec :

$$\overrightarrow{v_{1s}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left\{\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\vec{\imath} + \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)\vec{\jmath}\right\},$$

$$\overrightarrow{v_{1s}} = 0{,}07\vec{\imath} + 0{,}63\vec{\jmath}.$$

$$\overrightarrow{a_{1s}} = -\frac{\sqrt{2}\pi}{16}\left\{\left(2 + \frac{\pi}{4}\right)\vec{\imath} - \left(2 - \frac{\pi}{4}\right)\vec{\jmath}\right\},$$

$$\overrightarrow{a_{1s}} = -0{,}77\vec{\imath} + 0{,}34\vec{\jmath}.$$