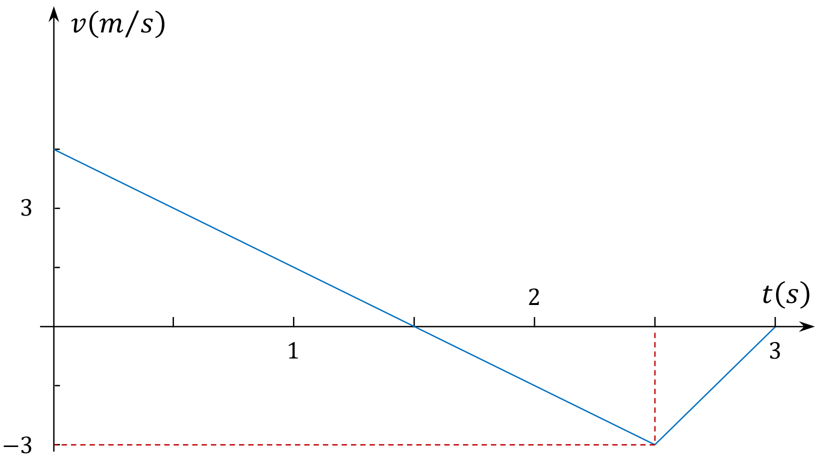
Déduction du Graphe de $x(t)$ de celui de $v(t)$ de 3 Manières

Exercice

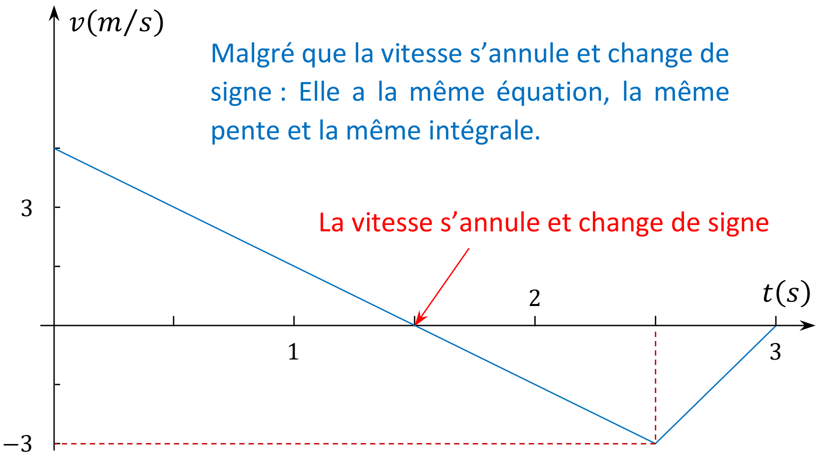
Ci-dessous est donné le tracé des vitesses d'un corps en mouvement le long de l'axe Ox. On prend $x(0) = -2m$.

1. Déterminer à partir du diagramme des vitesses :
   a. Les différents intervalles de temps du mouvement.
   b. Le sens du mouvement dans chaque intervalle.
2. Tracer le diagramme des accélérations du mobile.
3. Quelle est la nature du mouvement de chaque phase ?
4. Tracer le diagramme des espaces du mobile.
5. Calculer de deux manières différentes, la distance parcourue par le mobile ainsi que son abscisse à $t = 2s$.
6. Tracer sur la trajectoire du mobile, les vecteurs position, vitesse et accélération à $t = 2s$.



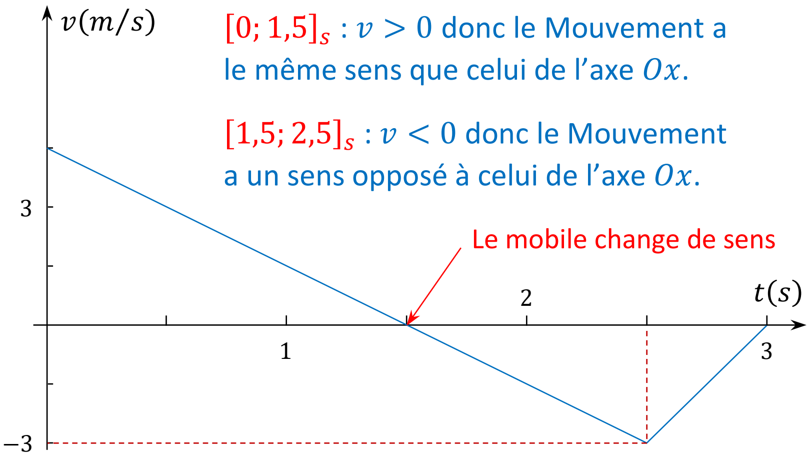
Les intervalles de temps

Malgré que la vitesse s'annule et change de signe : Elle a la même équation, la même pente et la même intégrale.



$[0; 2{,}5]_s$ & $[2{,}5; 3]_s$.

Le sens du mouvement



$[0; 1{,}5]_s$: $v > 0$ donc le Mouvement a le même sens que celui de l'axe Ox.

$[1{,}5; 2{,}5]_s$: $v < 0$ donc le Mouvement a un sens opposé à celui de l'axe Ox.

$[2{,}5; 3]_s$: $v < 0$ donc le Mouvement a un sens opposé à celui de l'axe Ox.

Le Graphe des Accélérations

Du graphe des vitesses, on remarque que : $v(t) = \alpha t \mp \beta$.

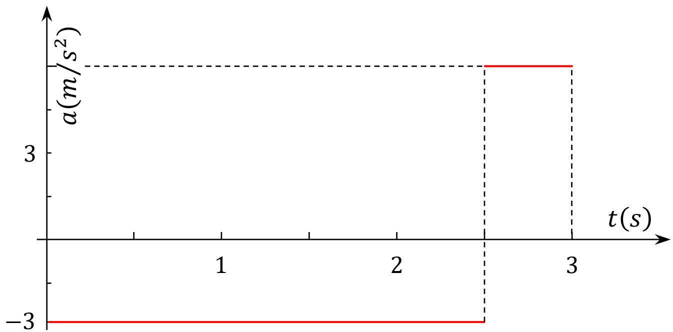
Or, le mvt est suivant Ox, donc $v(t)$ et a vérifient : $a = \frac{d}{dt}v(t) = \alpha$.

$[0; 2{,}5]_s$: $a^{(1)} = \alpha^{(1)} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{0-4{,}5}{1{,}5-0} = -3\,m/s^2$.

$[2{,}5; 3]_s$:

$a^{(2)} = \alpha^{(2)} = \frac{0-(-3)}{3-2{,}5}$

$a^{(2)} = 6\,m/s^2$.



La Nature du Mouvement

La Nature du Mouvement est Déduite du signe du produit algébrique : $a \cdot v(t)$.

- $[0; 2{,}5]_s$:

  1. $[0; 1{,}5]_s$: $a^{(1)} < 0$; $v(t) > 0$ d'où :
  $a \cdot v(t) < 0$. Le mouvement est alors Rectiligne Uniformément Décéléré.
  2. $[1{,}5; 2{,}5]_s$: $a^{(1)} < 0$; $v(t) < 0$ d'où :
  $a \cdot v(t) > 0$. Le mouvement est alors Rectiligne Uniformément Accéléré.

- $[2{,}5; 3]_s$: $a^{(2)} > 0$; $v(t) < 0$ d'où :
  $a \cdot v(t) < 0$. Le mouvement est alors Rectiligne Uniformément Décéléré.

Diagramme des Espaces – Plan de Travail

1ère Alternative – Calcul Analytique

On détermine Analytiquement les Équations de $v^{(i)}(t)$. Puis, on calcule leurs Intégrales par rapport à t selon deux méthodes :

- $\int_{t_1}^{t} f(t)\,dt = \{F(t) \mp C\}|_{t_1}^{t}$: Intégrale Définie
- $\int f(t)\,dt = F(t) \mp C$: Intégrale Indéfinie

2ème Alternative – Calcul Géométrique

On détermine Géométriquement les Abscisses Limites.

- v Nulle : on relie d'une droite Horizontale.
- v Cst : on joint les points par une droite de la forme $\alpha t \mp \beta$.
- v De forme $\alpha t \mp \beta$: partie de parabole du type $\frac{1}{2}\alpha t^2 \mp \beta t \mp \gamma$.

1ère Alternative – Méthode Analytique
Les Équations de $v^{(i)}(t)$

On déduit du Diagramme des Vitesses que :

- $[0; 2{,}5]_s : v^{(1)} = \alpha^{(1)}t \mp \beta^{(1)}$ où $\alpha^{(1)} = -\,3\,m/s^2$; $\beta^{(1)} = 4{,}5\,m/s$.
  Car du graphe on a : $v^{(1)}(0) = 4{,}5\,m/s$. Donc :
  $$v^{(1)} = -3t \mp 4{,}5$$

- $[2{,}5; 3]_s : v^{(2)} = \alpha^{(2)}t \mp \beta^{(2)}$ où $\alpha^{(2)} = 6\,m/s^2$.
  Pour déterminer $\beta^{(2)}$, on prend du graphe le point : $\left(t; v^{(2)}\right) = (3; 0)$.
  Donc : $0 = 6 \cdot (3) \mp \beta^{(2)}$ d'où $\beta^{(2)} = -\,18\,m/s$.
  $$v^{(2)} = 6t - 18.$$

1ère Alternative – Méthode Analytique

Les Équations de $x^{(i)}(t)$ – 1ère Méthode

Le mvt est selon Ox, on a donc : $v(t) = \frac{d}{dt}x(t) \Longrightarrow \int_{t_1}^{t} v(t)\,dt = \int_{t_1}^{t} \frac{d\,x(t)}{dt}\,dt.$

- $t \in [0; 2{,}5]_s\ t_1 = 0\,s$: $\qquad v^{(1)} = -3t \dotplus 4{,}5$ d'où :

$$x^{(1)}(t)\Big|_0^t = \int_0^t [-3t \dotplus 4{,}5]\,dt = -3\cdot\tfrac{1}{2}t^2\big|_0^t \dotplus 4{,}5\cdot t\big|_0^t = -3\cdot\tfrac{1}{2}t^2 \dotplus 4{,}5\cdot t.$$

Or, on a par hypothèse : $x^{(1)}(0) = -2\,m$. Donc :

$$x^{(1)}(t) = -\tfrac{3}{2}t^2 \dotplus 4{,}5t - 2$$

- $t \in [2{,}5; 3]_s\ t_1 = 2{,}5\,s$: $\qquad v^{(2)} = 6t - 18$ d'où :

$$x^{(2)}(t) - x^{(2)}(2{,}5) = 6\cdot\tfrac{1}{2}t^2\big|_{2,5}^t - 18\cdot t\big|_{2,5}^t =$$

$$= 3(t^2 - 2{,}5^2) - 18\cdot(t - 2{,}5) = 3t^2 - 18t - 18{,}75 \dotplus 45.$$

Avec : $x^{(2)}(2{,}5) = x^{(1)}(2{,}5) = -0{,}125\,m$ Donc :

$$x^{(2)}(t) = 3t^2 - 18t \dotplus 26{,}125$$

1ère Alternative – Méthode Analytique

Les Équations de $x^{(i)}(t)$ – 2ème Méthode

Le mvt est selon Ox, on a donc : $v(t) = \frac{d}{dt}x(t) \Longrightarrow \int v(t)\,dt = \int \frac{d\,x(t)}{dt}dt.$

- $t \in [0; 2{,}5]_s$: $v^{(1)} = -3t \dotplus 4{,}5$ d'où :

$x^{(1)}(t) \dotplus c = \int[-3t \dotplus 4{,}5]\,dt \Longrightarrow x^{(1)}(t) = -\frac{3}{2}t^2 \dotplus 4{,}5t \dotplus C_1.$

Or, on a par hypothèse : $x^{(1)}(0) = -2\,m$. Donc : $C_1 = -2\,m \Longrightarrow$

$$x^{(1)}(t) = -\frac{3}{2}t^2 \dotplus 4{,}5t - 2$$

- $t \in [2{,}5; 3]_s$: $v^{(2)} = 6t - 18$ d'où :

$x^{(2)}(t) \dotplus c = \int[6t - 18]\,dt \Longrightarrow x^{(2)}(t) = 3t^2 - 18t \dotplus C_2.$

Avec : $x^{(2)}(2{,}5) = x^{(1)}(2{,}5) = -0{,}125\,m$. Donc : $C_2 = 26{,}125\,m \Longrightarrow$

$$x^{(2)}(t) = 3t^2 - 18t \dotplus 26{,}125$$

$1^{ère}$ Alternative – Méthode Analytique

Les Abscisses Limites

On calcule les Abscisses Limites des 3 phases : $[0; 1{,}5]_s$, $[1{,}5; 2{,}5]_s$ et $[2{,}5; 3]_s$.

- $x_{0s} = -2\,m$. Donné par hypothèse
- $x_{1,5s} = -\frac{3}{2}(1{,}5)^2 \mp 4{,}5(1{,}5) - 2 = 1{,}375\,m$.
- $x_{2,5s} = -0{,}125\,m$. Déjà calculée
- $x_{3s} = 3(3)^2 - 18(3) \mp 26{,}125 = -0{,}875\,m$.

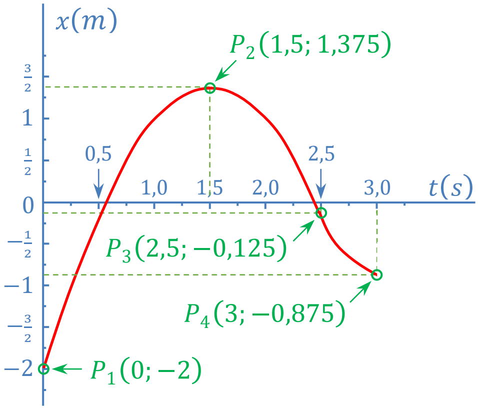
Aussi, $x(t)$ présente une valeur maximale à $t = 1{,}5\,s$ au point $(1{,}5; 1{,}375)$.

- $x^{(1)}(t)$: Est une parabole dont la courbure est dirigée vers le bas car le coefficient de son t^2 est négatif.
- $x^{(2)}(t)$: Est une parabole dont la courbure est dirigée vers le haut car le coefficient de son t^2 est positif.

1ère Alternative – Méthode Analytique

Le Diagramme des Espaces

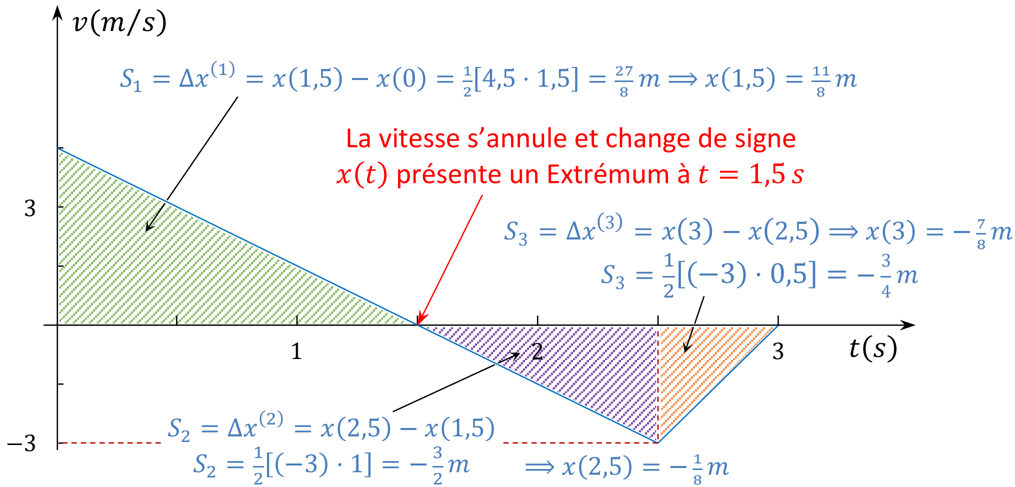
Chaque point P_n est donné par ses coordonnées $(t; x)$.



- $P_1: (0; -2)$. Donné par hypothèse
- $P_2: (1{,}5; 1{,}375)$.
- $P_3: (2{,}5; -0{,}125)$.
- $P_4: (3; -0{,}875)$.

- $x^{(1)}(t)$: coupe l'axe des temps à $t = 0{,}542\ s$ et à $t = 2{,}457\ s$.

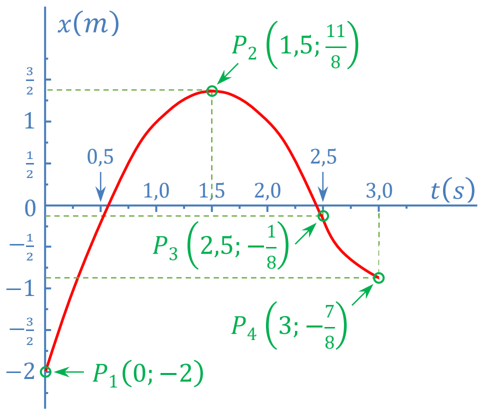
$2^{ème}$ Alternative – Calcul Géométrique
Calcul des Abscisses



1ère Alternative – Méthode Analytique

Le Diagramme des Espaces

Chaque point P_n est donné par ses coordonnées $(t; x)$.



- $P_1: (0; -2)$. Donné par hypothèse
- $P_2: \left(1{,}5; \frac{11}{8}\right)$.
- $P_3: \left(2{,}5; -\frac{1}{8}\right)$.
- $P_4: \left(3; -\frac{7}{8}\right)$.

- $0\,s \to 2{,}5\,s : a = -3 < 0 \to$
- $2{,}5\,s \to 3\,s : a = 6 > 0 \to$

Distance Parcourue et Abscisse à $t = 2\,s$ – $1^{ère}$ Méthode

Pour chaque phase, on a : $\Delta x^{(i)} = x_{finale}^{(i)} - x_{initiale}^{(i)}$

- La Distance Parcourue Totale est alors : $d_n = \sum_{i=1}^{n} \left|\Delta x^{(i)}\right|$

Les abscisses sont calculées à partir des équations horaires. Donc, comme $t = 1{,}5\,s$ et $t = 2\,s \in$ à $[0; 2{,}5]_s$ alors de $x^{(1)}(t)$ on a :

- $x_{1,5s} = -\frac{3}{2}(1{,}5)^2 \dotplus 4{,}5(1{,}5) - 2 = 1{,}375\,m,$
- $x_{2s} = -\frac{3}{2}(2)^2 \dotplus 4{,}5(2) - 2 = 1\,m.$

$$d_{2s} = \left|x_{1,5s} - x_{0s}\right| \dotplus \left|x_{2s} - x_{1,5s}\right| = |3{,}375| \dotplus |-0{,}375| = 3{,}75\,m$$

Distance Parcourue et Abscisse à $t = 2\,s$ – $2^{ème}$ Méthode

Pour chaque phase, on a : $S_i = x_{finale}^{(i)} - x_{initiale}^{(i)}$ où S_i est la surface comprise entre $v(t)$ et l'axe de t et entre $t_{initiale}^{(i)}$ et $t_{finale}^{(i)}$.

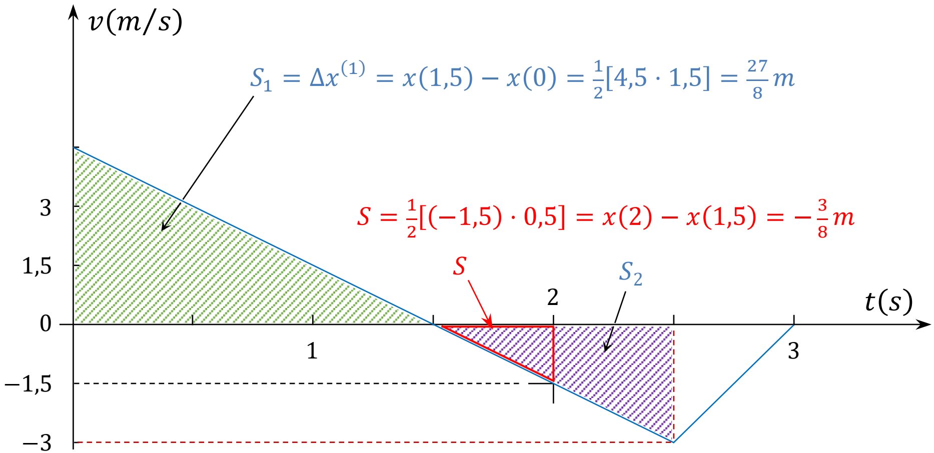
- La Distance Parcourue Totale est alors : $d_n = \sum_{i=1}^{n} |S_i|$
- L'Abscisse demandée est donnée par : $x_n = x_0 \mp \sum_{i=1}^{n} S_i$

Donc :

$$d_{2s} = |S_1| \mp |S_{1,5s\to 2s}| = \left|\frac{27}{8}\right| \mp \left|-\frac{3}{8}\right| = \frac{30}{8} = 3{,}75\,m$$

$$x_{2s} = x_0 \mp S_1 \mp S_{1,5s\to 2s} = -2 \mp \left(\frac{27}{8}\right) \mp \left(-\frac{3}{8}\right) = 1\,m$$

Les Surfaces dans le Graphe de $v(t)$ pour $t = 2\,s$



Abscisse, Vitesse et Accélération à $t = 2\,s$

Par projection sur les graphes des vitesses et des accélérations on a :

$$v_{2s} = -\,1{,}5\,m/s \Longrightarrow \overrightarrow{v_{2s}} = -1{,}5\vec{\imath}.$$

$$a_{2s} = -\,3\,m/s^2 \Longrightarrow \overrightarrow{a_{2s}} = -3\vec{\imath}.$$

De la question précédente, on a trouvé qu'à $t = 2\,s$, le mobile se trouve à l'abscisse :

$$x_{2s} = 1\,m \Longrightarrow \overrightarrow{OM_{2s}} = x_{2s}\vec{\imath} = \vec{\imath}.$$

Vecteurs Position, Vitesse et Accélération à $t = 2\ s$

$$\overrightarrow{OM_{2s}} = \vec{i}\ ;\ \overrightarrow{v_{2s}} = -1{,}5\vec{i}\ ;\ \overrightarrow{a_{2s}} = -3\vec{i}.$$