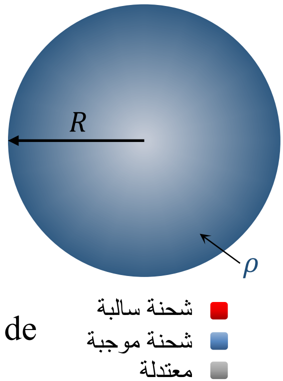
Champ & Potentiel d'une Sphère 2

Exercice 9

Soit une sphère de rayon R, muni d'une distribution de charge électrique volumique $\rho = \rho_0 r$ où ρ_0 est une constante positive.

1. Calculer la charge électrique totale de la sphère.
2. Déterminer, en utilisant le théorème de Gauss, le vecteur champ électrique $\vec{E}(r)$ produit par cette sphère, dans tout l'espace.
3. Déduire, le potentiel électrique $V(r)$ produit par cette sphère, dans tout l'espace.
   Utiliser le fait que $V(\infty) = 0$.

La Charge Électrique Totale

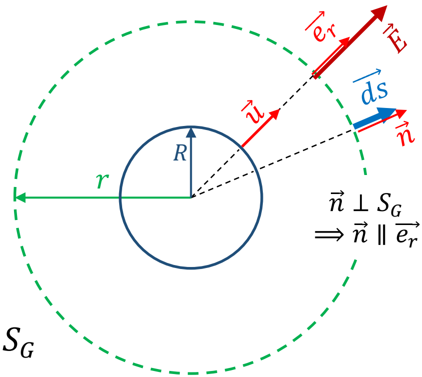


La sphère a une distribution volumique variable de charges électriques, c'est donc un corps ***isolant***.

- $\rho = \frac{dq}{dv}$ telle que : dq est l'élément infinitésimal de charge et dv est l'élément infinitésimal de volume. D'où : $dq = \rho\, dv = \rho_0 r\, dv$
- La densité ρ est radiale donc : $dv = \sin\theta\, r^2\, d\varphi\, d\theta\, dr = 4\pi r^2\, dr$

$$\int_0^Q dq = Q = \int_0^R (\rho_0 r) 4\pi r^2\, dr = 4\pi\rho_0 \int_0^R r^3\, dr = \pi\rho_0 R^4$$

Calcul du Flux



$$\phi = \oiint_{S_G} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = \oiint_{S_G} E(r)\,\overrightarrow{e_r} \cdot \vec{n}\,ds$$

Avec $\overrightarrow{ds} = \vec{n}\,ds$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{e_r} = 1$

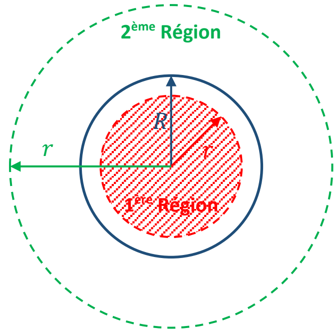
$$\phi = \oiint_{S_G} E(r)\,ds = E(r) \oiint_{S_G} ds = E(r)\,S_G$$

Le module $E(r) = Cst$, car sur S_G, $r = cst$.

S_G est une sphère de rayon $r \Longrightarrow S_G = 4\pi r^2$

$$\phi = 4\pi r^2\,E(r)$$

Calcul du Vecteur Champ $\vec{E}(r)$ – 1



$$\phi = 4\pi r^2\, E(r) = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}.$$

- **1ère Région : $r < R$**

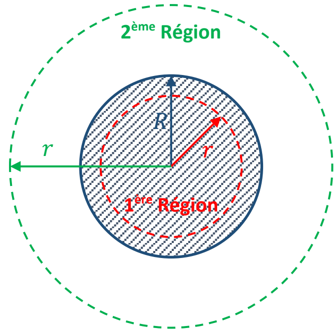
S_G ne contient qu'une parie $q(r)$ de la charge $\Longrightarrow$

$$\int_0^q dq = q(r) = 4\pi\rho_0 \int_0^r r^3\, dr = \pi\rho_0 r^4$$

$$E_1(r)\, 4\pi r^2 = \frac{\pi\rho_0 r^4}{\varepsilon_0} \Longrightarrow$$

$$\overrightarrow{E_1}(r) = \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0} r^2 \overrightarrow{e_r}$$

Calcul du Vecteur Champ $\vec{E}(r) - 2$



$$\phi = 4\pi r^2\, E(r) = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}.$$

- **1ère Région : $r < R$**

S_G contient toute la charge $Q = \pi\rho_0 R^4 \Longrightarrow$

$$E_2(r)\, 4\pi r^2 = \frac{\pi\rho_0 R^4}{\varepsilon_0} \Longrightarrow$$

$$\overrightarrow{E_2}(r) = \frac{\rho_0 R^4}{4\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\overrightarrow{e_r}$$

Déduction du Potentiel $V(r)$

$$\int dV = -\int E(r)\,dr$$

- **$1^{\text{ère}}$ Région : $r < R$**

$$V_1(r) = -\int E_1(r)\,dr \mp c_1 = -\frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}\int r^2\,dr \mp c_1 = -\frac{\rho_0}{12\varepsilon_0}r^3 \mp c_1' \mp c_1$$

$$\Longrightarrow V_1(r) = -\frac{\rho_0}{12\varepsilon_0}r^3 \mp C_1$$

- **$2^{\text{ème}}$ Région : $r > R$**

$$V_2(r) = -\int E_2(r)\,dr \mp c_2 = -\frac{\rho_0 R^4}{4\varepsilon_0}\int \frac{1}{r^2}\,dr \mp c_2 = \frac{\rho_0 R^4}{4\varepsilon_0}\frac{1}{r} \mp c_2' \mp c_2$$

$$\Longrightarrow V_2(r) = \frac{\rho_0 R^4}{4\varepsilon_0}\frac{1}{r} \mp C_2$$

Calcul des Constantes

On a $V(\infty) = 0$, qui n'est possible que dans la 2ème région. D'où :

- **2ème Région : $r > R$**

$$\lim_{r\to\infty}\{V_2(r)\} = \lim_{r\to\infty}\left\{\frac{\rho_0 R^4}{4\varepsilon_0}\frac{1}{r} \mp C_2\right\} = C_2 = 0 \Longrightarrow \qquad V_2(r) = \frac{\rho_0 R^4}{4\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

- **1ère Région : $r < R$**

Le potentiel est une fonction continue, donc à la limite $r = R$ on a :

$$V_1(R) = V_2(R) \Longrightarrow -\frac{\rho_0}{12\varepsilon_0}R^3 \mp C_1 = \frac{\rho_0 R^4}{4\varepsilon_0}\frac{1}{R} \text{ d'où :}$$

$$C_1 = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0} \Longrightarrow \qquad V_1 = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left(R^3 - \frac{r^3}{4}\right)$$