Potentiel & Champ d'un Cylindre Infiniment Long

Exercice 8

Soit un conducteur cylindrique creux infiniment long de rayon R, muni d'une distribution de charge électrique positive σ.

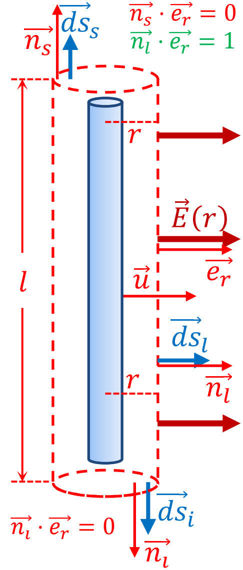
1. Représenter qualitativement la distribution de charge.
2. Déterminer, en utilisant le théorème de Gauss, le vecteur champ électrique $\vec{E}(r)$ produit par ce conducteur, dans tout l'espace.
3. Déduire, le potentiel électrique $V(r)$ produit par ce conducteur, dans tout l'espace.
   Utiliser le fait que $V(R) = V_0$.

Représentation Qualitative des Charges

Le cylindre est conducteur, donc :

- La densité des charges électriques est homogène
- Les charges électriques se trouvent sur la surface externe de la sphère
- La densité σ des charges électriques est superficielle et constante
- Le volume intérieur du cylindre est vide

Calcul du Flux



$$\phi = \iint_{S_s} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds_s} + \iint_{S_l} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds_l} + \iint_{S_i} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds_i} \ /$$

$$\overrightarrow{ds_s} = \overrightarrow{n_s}\, ds_s,\ \overrightarrow{ds_l} = \overrightarrow{n_l}\, ds_l \text{ et } \overrightarrow{ds_i} = \overrightarrow{n_i}\, ds_i$$

$$\iint_{S_s} E(r)\, \overrightarrow{e_r} \cdot \overrightarrow{n_s}\, ds_s = \iint_{S_s} E(r)\, \overrightarrow{e_r} \cdot \overrightarrow{n_i}\, ds_i = 0 \Longrightarrow$$

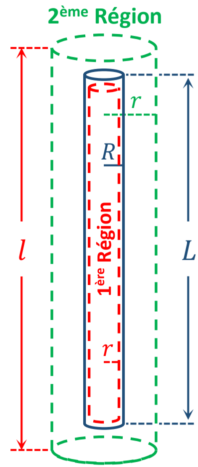
$$\phi = \iint_{S_l} E(r)\, \overrightarrow{e_r} \cdot \overrightarrow{n_l}\, ds_l = \iint_{S_l} E(r)\, ds_l$$

Cylindre $\infty \Longrightarrow E(r) = Cst$ sur tout S_l où $r = cst$, ainsi

$$\phi = E(r) \iint_{S_l} ds_l = E(r)\, S_l$$

S_l : cylindre de rayon $r \Longrightarrow S_l = 2\pi r l \Longrightarrow \phi = E(r)\, 2\pi r l$

Calcul du Vecteur Champ $\vec{E}(r)$



$$\phi = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0} = 2\pi r l\, E(r) = 2\pi r L\, E(r), \text{ car à } \infty : l \approx L$$

- **1ère Région : $r < R$**

S_G ne contient aucune charge $\Longrightarrow \sum q_{int} = 0.$

$$E_1(r)\, 2\pi r L = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{E_1}(r) = \vec{0}$$

Vu que r est arbitraire.

- **2ème Région : $r > R$**

S_G contient toute la charge $Q \Longrightarrow \sum q_{int} = Q = \sigma 2\pi R L.$

$$E_2(r) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\frac{1}{r} \Longrightarrow \overrightarrow{E_2}(r) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}\overrightarrow{e_r}$$

Déduction du Potentiel $V(r)$

$$\int dV = -\int E(r)\,dr$$

- **$1^{ère}$ Région : $r < R$**

$$V_1(r) = -\int E_1(r)\,dr \mp c_1 = -\int 0\,dr \mp c_1 = -c_1' \mp c_1 = C_1 \Longrightarrow$$

$$V_1 = C_1.$$

- **$2^{ème}$ Région : $r > R$**

$$V_2(r) = -\int E_2(r)\,dr \mp c_2 \Longrightarrow$$

$$V_2(r) = -\int \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}dr \mp c_2 = -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\int \frac{1}{r}dr \mp c_2 = -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln r \mp c_2' \mp c_2 \Longrightarrow$$

$$V_2(r) = -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln r \mp C_2.$$

Calcul des Constantes – 1ère alternative

$V(r=R)=V_0$ est une condition valable pour les deux régions à la fois.

1ère alternative

- **1ère Région : $r<R$**

$V_1=C_1=V_0 \Longrightarrow \qquad V_1=V_0$

- **2ème Région : $r>R$**

Le potentiel est une fonction continue, donc à la limite $r=R$ on a :

$$V_2(r=R)=V_1 \Longrightarrow -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln R \mp C_2=V_0 \Longrightarrow C_2=V_0 \mp \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln R \Longrightarrow$$

$$V_2(r)=-\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln\frac{r}{R} \mp V_0.$$

Calcul des Constantes – 2ème alternative

$V(r = R) = V_0$ est une condition valable pour les deux régions à la fois.

2ème alternative

- **2ème Région : $r > R$**

$$V_2(r = R) = V_0 \Longrightarrow -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln R \mp C_2 = V_0 \Longrightarrow C_2 = V_0 \mp \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln R \Longrightarrow$$

$$V_2(r) = -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln\frac{r}{R} \mp V_0.$$

- **1ère Région : $r < R$**

Le potentiel est une fonction continue, donc à la limite $r = R$ on a :

$$V_1 = C_1 = V_2(R) = V_0 \Longrightarrow \qquad V_1 = V_0$$