# Champ & Potentiel d'une Sphère

## Exercice 7

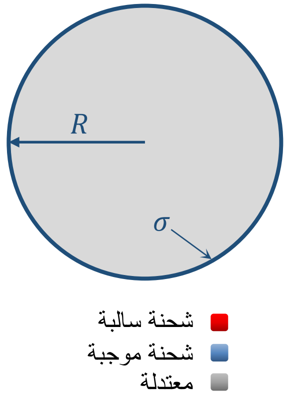
Soit un conducteur sphérique de rayon $R$, muni d'une distribution de charge électrique positive $\sigma$.

1. Représenter qualitativement la distribution de charge.
2. Déterminer, en utilisant le théorème de Gauss, le vecteur champ électrique $\vec{E}(r)$ produit par ce conducteur, dans tout l'espace.
3. Déduire, le potentiel électrique $V(r)$ produit par ce conducteur, dans tout l'espace.
   Utiliser le fait que $V(\infty) = 0$.

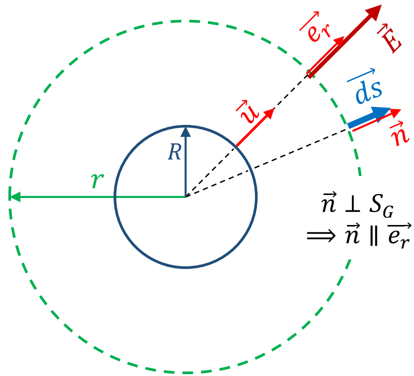
# Représentation Qualitative des Charges

La Sphère est conductrice, donc :

- La densité des charges électriques est homogène
- Les charges électriques se trouvent sur la surface externe de la sphère
- La densité $\sigma$ des charges électriques est superficielle et constante
- Le volume intérieur de la sphère est neutre



# Calcul du Flux




$$\phi = \oiint_{S_G} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = \oiint_{S_G} E(r)\, \overrightarrow{e_r} \cdot \vec{n}\, ds$$

Avec $\overrightarrow{ds} = \vec{n}\, ds$

et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{e_r} = 1$

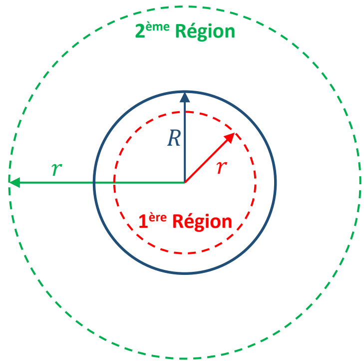
Sur $S_G$, $r = cst$, ainsi $E(r) = Cst$

$$\phi = \oiint_{S_G} E(r)\, ds = E(r) \oiint_{S_G} ds = E(r)\, S_G$$

$S_G$ sphère de rayon $r \Longrightarrow S_G = 4\pi r^2$

$$\phi = 4\pi r^2\, E(r)$$

## Calcul du Vecteur Champ $\vec{E}(r)$




$$\phi = 4\pi r^2\, E(r) = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}.$$

- **1ère Région : $r < R$**

$S_G$ ne contient aucune charge $\Longrightarrow \sum q_{int} = 0$.

$$E_1(r)\, 4\pi r^2 = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{E_1}(r) = \vec{0}$$

Vu que $r$ est arbitraire.

- **2ème Région : $r > R$**

$S_G$ contient toute la charge $Q \Longrightarrow \sum q_{int} = Q$. D'où :

$$E_2(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \Longrightarrow \overrightarrow{E_2}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\overrightarrow{e_r}$$

# Déduction du Potentiel $V(r)$

$$\int dV = -\int E(r)\,dr$$

- **1ère Région : $r < R$**

$$V_1(r) = -\int E_1(r)\,dr \mp c = -\int 0\,dr \mp c_1 = c_1' \mp c_1$$

$$\Longrightarrow V_1(r) = C_1$$

- **2ème Région : $r > R$**

$$V_2(r) = -\int E_2(r)\,dr \mp c_2 = -\int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}dr \mp c_2$$

$$V_2(r) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{1}{r^2}dr \mp c_2 = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right) \mp c_2' \mp c_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} \mp C_2$$

# Calcul des Constantes

On sait que $V(\infty) = 0$

Or, cette condition n'est possible que dans la seconde région. D'où :

- **$2^{ème}$ Région : $r > R$**

$$\lim_{r\to\infty}\{V_2(r)\} = \lim_{r\to\infty}\left\{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} \mp C_2\right\} = C_2 = 0 \Longrightarrow \qquad V_2(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

- **$1^{ère}$ Région : $r < R$**

Le potentiel est une fonction continue, donc à la limite $r = R$ on a :

$$V_1 = V_2(R) \Longrightarrow$$

$$C_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} \Longrightarrow \qquad V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$$