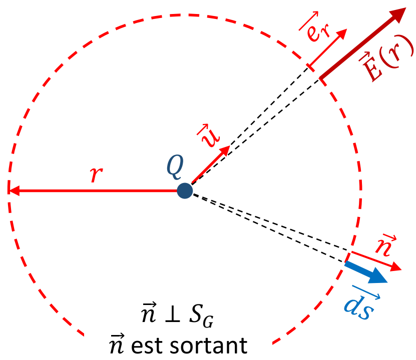
Champ & Potentiel d'une Charge Ponctuelle

Exercice 5

Soit une charge électrique ponctuelle Q.

1. Déterminer, en utilisant le théorème de Gauss, le vecteur champ électrique $\vec{E}(r)$ produit par cette charge, dans tout l'espace.
2. Déduire, le potentiel électrique $V(r)$ produit par cette charge, dans tout l'espace.
   Utiliser le fait que $V(\infty) = 0$.

Surface de Gauss



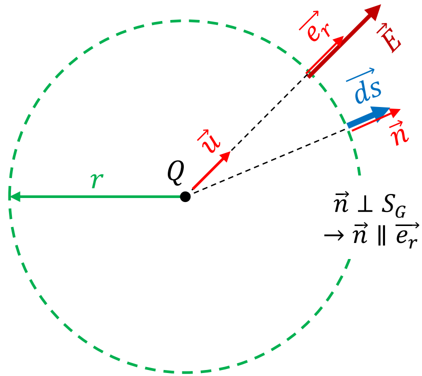
On utilise le théorème de Gauss

$$\phi = \oiint_{S_G} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}.$$

Le système est sphérique, on utilise alors

- Les coordonnées sphériques et $\overrightarrow{e_r}$, $\overrightarrow{e_\varphi}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$
- Les vecteurs unitaires $\vec{u}$, $\vec{n}$ et $\overrightarrow{e_r}$ sont colinéaires
- On choisit pour S_G : une Sphère Cible de rayon r
- Le vecteur champ $\vec{E}$ est radial et s'écrit : $\vec{E} = E(r)\,\vec{u} = E(r)\,\overrightarrow{e_r}$

Calcul du Flux



$$\phi = \oiint_{S_G} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = \oiint_{S_G} E(r)\, \overrightarrow{e_r} \cdot \vec{n}\, ds$$

Avec $\overrightarrow{ds} = \vec{n}\, ds$

et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{e_r} = 1$

Sur S_G, $r = cst$, ainsi $E(r) = Cst$

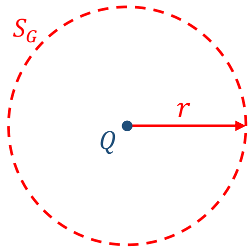
$$\phi = \oiint_{S_G} E(r)\, ds = E(r) \oiint_{S_G} ds = E(r)\, S_G$$

S_G sphère de rayon $r \Longrightarrow S_G = 4\pi r^2$

$$\phi = 4\pi r^2\, E(r)$$

Calcul du Vecteur Champ $\vec{E}(r)$

Une seule Région



$$\phi = 4\pi r^2\, E(r) = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0} \Longrightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

S_{G} contient uniquement la charge Q

$$\sum q_{int} = Q.$$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \rightarrow \vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\overrightarrow{e_r}$$

Déduction du Potentiel $V(r)$

$$\int dV = -\int E(r)\,dr$$

$$V(r) = -\int E(r)\,dr \mp c = -\int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,dr \mp c$$

$$V(r) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{1}{r^2}\,dr \mp c = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right) \mp c' \mp c = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} \mp C$$

Or, $V(\infty) = 0$ d'où : $\lim\limits_{r\to\infty}\left\{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} \mp C\right\} = C = 0 \Longrightarrow V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$