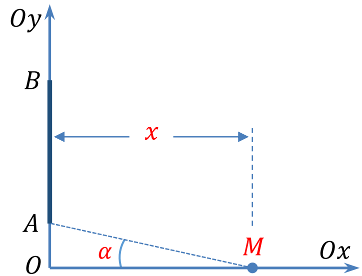
Fil Vertical Uniformément Chargé

Exercice 4



Soit un filament rectiligne AB de longueur l, doté d'une densité de charge électrique linéique, uniforme et positive λ. On définit un point M, sur l'axe Ox perpendiculaire au fil, par les deux paramètres x et α (figure ci-contre).

1. Déterminer l'expression du champ électrostatique $\overrightarrow{E_M}$ au point M.
2. Étudier les cas où :
   a. Le filament est symétrique par rapport à l'axe Ox.
   b. Le filament est infiniment long.

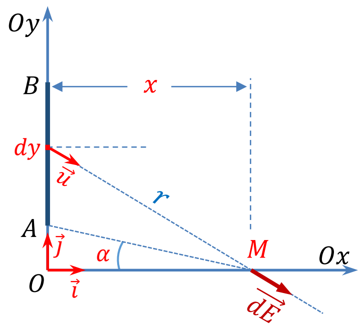
Le Champ $\overrightarrow{E_M}$ – Stratégie

L'élément de longueur dy porte l'élément de charge dq. Ce dernier Produit au point M L'élément de champ $\overrightarrow{dE}$

Comme l'élément dy est assimilé à un point matériel, L'élément de champ $\overrightarrow{dE}$ est donné par : $\overrightarrow{dE} = K\frac{dq}{r^2}\vec{u}$. D'où :

$$\overrightarrow{E_M} = \int_{fil}\overrightarrow{dE} = K\int_{fil}\vec{u}\frac{dq}{r^2} = K\lambda\int_{fil}\vec{u}\frac{dy}{r^2}.$$

Où, on a utilisé le fait que : $dq = \lambda\, dy$



On omet tous les indices, car on n'utilise qu'un seul élément.

Le Champ $\overrightarrow{E_M}$ – Intégration en y

Le vecteur unitaire $\vec{u}$ est donné par :

$\vec{u} = \cos\theta\,\vec{\imath} - \sin\theta\,\vec{\jmath}$. Où :

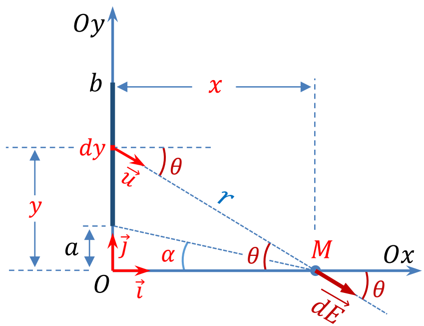
$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 \mp y^2}}$; $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 \mp y^2}}$. Donc :

$\vec{u} = \frac{x}{\sqrt{x^2 \mp y^2}}\vec{\imath} - \frac{y}{\sqrt{x^2 \mp y^2}}\vec{\jmath}$. Avec : $r^2 = x^2 \mp y^2$.

$$\overrightarrow{E_M} = K\lambda \int_a^b \left\{ \frac{x\,dy}{(x^2 \mp y^2)^{3/2}}\vec{\imath} - \frac{y\,dy}{(x^2 \mp y^2)^{3/2}}\vec{\jmath} \right\}.$$

Où, la première intégrale est plus difficile à résoudre que la seconde intégrale.

On procède alors d'une autre manière.



Les deux premiers θ sont alternes internes et les seconds θ sont des angles aux sommets.

Le Champ $\overrightarrow{E_M}$ – Intégration en θ

$$\overrightarrow{E_M} = \int_{fil} \overrightarrow{dE} = K \int_{fil} \vec{u}\,\frac{dq}{r^2} = K\lambda \int_a^b \vec{u}\,\frac{dy}{r^2}.$$

Avec : $\vec{u} = \cos\theta\,\vec{\imath} - \sin\theta\,\vec{\jmath}$. D'où :

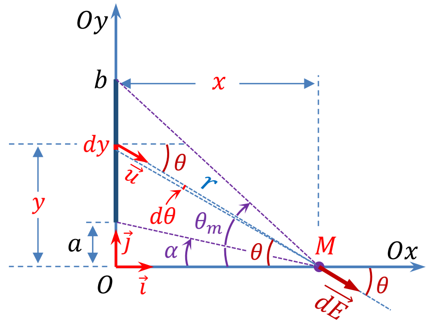
$$\overrightarrow{E_M} = K\lambda \int_a^b \left(\frac{\cos\theta}{r^2}\vec{\imath} - \frac{\sin\theta}{r^2}\vec{\jmath}\right) dy.$$

$$\overrightarrow{E_M} = K\lambda \int_a^b \left\{\frac{(\cos\theta)^3}{x^2}\vec{\imath} - \frac{(\cos\theta)^2\sin\theta}{x^2}\vec{\jmath}\right\} dy.$$

Où, on a utilisé le fait que : $\cos\theta = \frac{x}{r} \Longrightarrow \frac{1}{r} = \frac{\cos\theta}{x}$.

Aussi, sachant que : $\text{tag}\,\theta = \frac{y}{x} \Longrightarrow dy = \frac{x}{(\cos\theta)^2} d\theta$

$$\overrightarrow{E_M} = K\lambda \int_\alpha^{\theta_m} \left\{\frac{\cos\theta}{x}\vec{\imath} - \frac{\sin\theta}{x}\vec{\jmath}\right\} d\theta.$$



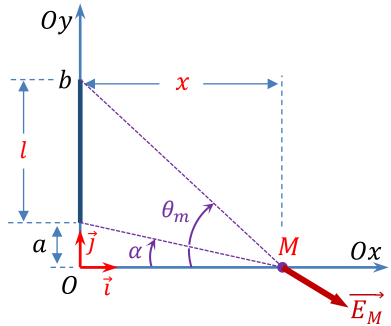
$$\overrightarrow{E_M} = \frac{K\lambda}{x}\{[\sin\theta_m - \sin\alpha]\,\vec{\imath} \mp [\cos\theta_m - \cos\alpha]\,\vec{\jmath}\}.$$

Le Champ $\overrightarrow{E_M}$ – Résultat Final

$$\overrightarrow{E_M} = \frac{K\lambda}{x}[\sin\theta_m - \sin\alpha]\,\vec{i} + [\cos\theta_m - \cos\alpha]\,\vec{j}.$$

Avec : $\cos\alpha = \frac{x}{(x^2+a^2)^{1/2}}$; $\sin\alpha = \frac{a}{(x^2+a^2)^{1/2}}$. Et :

$\cos\theta_m = \frac{x}{[x^2+(l+a)^2]^{1/2}}$; $\sin\theta_m = \frac{l+a}{[x^2+(l+a)^2]^{1/2}}$.

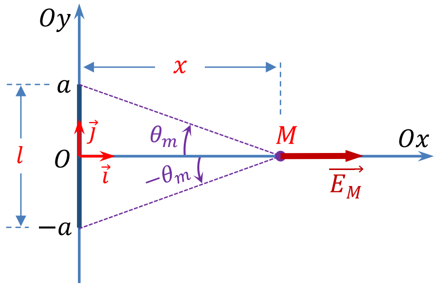


$$\overrightarrow{E_M} = \frac{K\lambda}{x}\left[\frac{l+a}{[x^2+(l+a)^2]^{1/2}} - \frac{a}{(x^2+a^2)^{1/2}}\right]\vec{i} + \left[\frac{x}{[x^2+(l+a)^2]^{1/2}} - \frac{x}{(x^2+a^2)^{1/2}}\right]\vec{j}.$$

Le Champ $\overrightarrow{E_M}$ pour un Fil Symétrique / Ox

$$\overrightarrow{E_M} = \frac{K\lambda}{x}\{[\sin\theta_m - \sin(-\theta_m)]\,\vec{\imath} + [\cos\theta_m - \cos(-\theta_m)]\,\vec{\jmath}\}.$$

$$\overrightarrow{E_M} = \frac{K\lambda}{x}[2\sin\theta_m]\,\vec{\imath}.$$



Avec : $\cos\theta_m = \frac{x}{(x^2+a^2)^{1/2}}$; $\sin\alpha = \frac{a}{(x^2+a^2)^{1/2}}$.

$$\overrightarrow{E_M} = 2\frac{K\lambda}{x}\frac{a}{(x^2+a^2)^{1/2}}\,\vec{\imath}.$$

Le Champ $\overrightarrow{E_M}$ pour un Fil Infiniment Long

Un fil infiniment long est un fil symétrique par rapport à tout axe perpendiculaire au fil …

$$\overrightarrow{E_M} = \frac{K\lambda}{x}\left\{\begin{matrix}[\sin\theta_m - \sin(-\theta_m)]\,\vec{\imath} \mp \\ \mp [\cos\theta_m - \cos(-\theta_m)]\,\vec{\jmath}\end{matrix}\right\}.$$

$$\overrightarrow{E_M} = \frac{K\lambda}{x}[2\sin\theta_m]\,\vec{\imath}.$$

Sauf que θ_m tend vers $\frac{\pi}{2}$ pour un fil infini :

$$\overrightarrow{E_M} = 2\frac{K\lambda}{x}\lim_{\theta_m\to\frac{\pi}{2}}\sin\theta_m\,\vec{\imath} \to 2\frac{K\lambda}{x}\vec{\imath}.$$

$\Longrightarrow$ Champ Uniforme $\vec{E} = K2\frac{\lambda}{x}\vec{\imath}.$