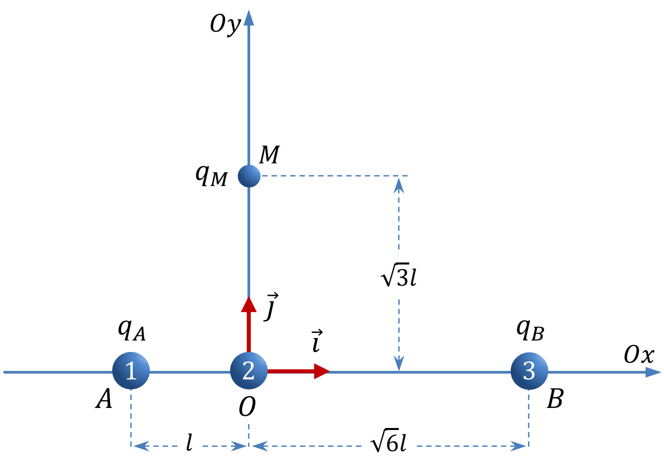
Charges Ponctuelles Alignées

Exercice 3

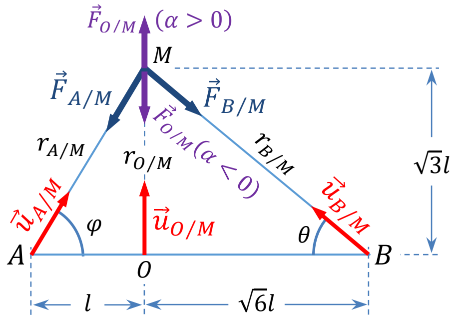
Soient trois charges électriques ponctuelles alignées q_A, q_O et q_B telles que : $q_A = -q\,;(q > 0)$, $q_O = \alpha q$ et $q_B = -\beta q\,;(\beta > 0)$. Où, α et β sont deux paramètres réels inconnus. Les charges q_A, q_O et q_B sont respectivement placées aux coordonnées $A(-l;0)$, $O(0;0)$ et $B\left(\sqrt{6}l;0\right)$ (figure ci-dessous). On place une autre charge $q_M = \frac{3}{2}q$ au point $M\left(0;\sqrt{3}l\right)$.

La charge q et la distance l sont supposées connues.

1. Déterminer et représenter les forces appliquées à la charge q_M.
2. Calculer le potentiel V_M produit au point M en fonction de α et β.
3. Déterminer les valeurs de α et β :
   a. Pour que la charge q_M soit en équilibre.
   b. Pour que la champ $\overrightarrow{E_M}$ produit au point M soit parallèle à l'axe Ox.
   c. Pour que la champ $\overrightarrow{E_M}$ produit au point M soit parallèle à l'axe Oy.



Les Forces Appliquées à q_M



q_M Cible $\longrightarrow$ 3 charges Sources
$\to$ 3 Forces

$\Longrightarrow \vec{F}_{A/M}$; $\vec{F}_{O/M}$ et $\vec{F}_{B/M}$

$$q_A \to q_M : \vec{F}_{A/M} = K\frac{q_A q_M}{r_{A/M}^2}\vec{u}_{A/M} = -\frac{3}{2}K\frac{q^2}{l^2+3l^2}\vec{u}_{A/M} = -\frac{3}{2}K\frac{q^2}{4l^2}\vec{u}_{A/M}$$

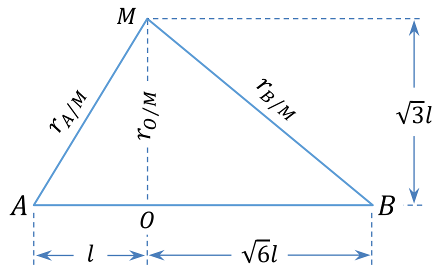
$$q_O \to q_M : \vec{F}_{O/M} = K\frac{q_O q_M}{r_{O/M}^2}\vec{u}_{O/M} = \frac{3}{2}K\frac{\alpha q^2}{3l^2}\vec{u}_{O/M} \; ; [\alpha > 0 \; ou \; \alpha < 0]$$

$$q_B \to q_M : \vec{F}_{B/M} = K\frac{q_B q_M}{r_{B/M}^2}\vec{u}_{B/M} = -\frac{3}{2}K\frac{\beta q^2}{3l^2+6l^2}\vec{u}_{B/M} = -\frac{3}{2}K\frac{\beta q^2}{9l^2}\vec{u}_{B/M}$$

Le potentiel V_M en fonction de α et β

M Cible ⟶ 3 charges Sources
→ 3 Contributions

$$\Longrightarrow V_{A/M} = K\frac{q_A}{r_{A/M}}\ ;\ V_{O/M}\ \text{et}\ V_{B/M}$$



$$V_M = V_{A/M} + V_{O/M} + V_{B/M}$$

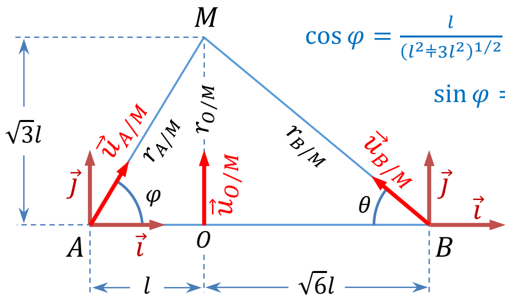
$$V_M = K\left[\frac{q_A}{r_{A/M}} + \frac{q_O}{r_{O/M}} + \frac{q_B}{r_{B/M}}\right] = K\left[\frac{-q}{(l^2+3l^2)^{1/2}} + \frac{\alpha q}{\sqrt{3}l} + \frac{-\beta q}{(3l^2+6l^2)^{1/2}}\right]$$

$$V_M = K\frac{q}{6l}\left[2\sqrt{3}\alpha - 3 - 2\beta\right]$$

La Force Résultante Appliquée à $q_M - 1$

Les vecteurs unitaires :

$$\vec{u}_{A/M} = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}$$
$$\vec{u}_{O/M} = \vec{j}$$
$$\vec{u}_{B/M} = -\cos\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$$



$$\cos\varphi = \frac{l}{(l^2+3l^2)^{1/2}} = \frac{1}{2}$$
$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{l}{(6l^2+3l^2)^{1/2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$
$$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

La Force Résultante :

$$\overrightarrow{F_M} = \vec{F}_{A/M} + \vec{F}_{O/M} + \vec{F}_{B/M}$$

$$\overrightarrow{F_M} = -\frac{3}{2}K\frac{q^2}{4l^2}\vec{u}_{A/M} + \frac{3}{2}K\frac{\alpha q^2}{3l^2}\vec{u}_{O/M} - \frac{3}{2}K\frac{\beta q^2}{9l^2}\vec{u}_{B/M}$$

Université de Boumerdes
Faculté des sciences
Département de physique

UEF – Physique 2
Sciences de la Matière
($2^{\text{ème}}$ Semestre 2022-2023)

La Force Résultante Appliquée à $q_M - 2$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}; \qquad \cos\varphi = \frac{l}{(l^2 \dotplus 3l^2)^{1/2}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{l}{(6l^2 \dotplus 3l^2)^{1/2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}; \qquad \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

La Force Résultante :

$$\overrightarrow{F_M} = -\frac{3}{2}K\left\{\frac{q^2}{4l^2}(\cos\varphi\,\vec{\imath} \dotplus \sin\varphi\,\vec{\jmath}) - \frac{\alpha q^2}{3l^2}\vec{\jmath} \dotplus \frac{\beta q^2}{9l^2}(-\cos\theta\,\vec{\imath} \dotplus \sin\theta\,\vec{\jmath})\right\}$$

$$\overrightarrow{F_M} = -\frac{3}{2}K\frac{q^2}{l^2}\left\{\frac{1}{4}\cos\varphi\,\vec{\imath} \dotplus \frac{1}{4}\sin\varphi\,\vec{\jmath} - \frac{\alpha}{3}\vec{\jmath} - \frac{\beta}{9}\cos\theta\,\vec{\imath} \dotplus \frac{\beta}{9}\sin\theta\,\vec{\jmath}\right\}$$

$$\overrightarrow{F_M} = -\frac{3}{2}K\frac{q^2}{l^2}\left\{\left[\frac{1}{4}\cos\varphi - \frac{\beta}{9}\cos\theta\right]\vec{\imath} \dotplus \left[\frac{1}{4}\sin\varphi \dotplus \frac{\beta}{9}\sin\theta - \frac{\alpha}{3}\right]\vec{\jmath}\right\}$$

$$\overrightarrow{F_M} = -\frac{3}{2}K\frac{q^2}{l^2}\left\{\left[\frac{1}{8} - \frac{\beta\sqrt{6}}{27}\right]\vec{\imath} \dotplus \left[\frac{\sqrt{3}}{8} \dotplus \frac{\beta\sqrt{3}}{27} - \frac{\alpha}{3}\right]\vec{\jmath}\right\}$$

La Charge q_M en Équilibre

La Force Résultante :

$$\overrightarrow{F_M} = -\frac{3}{2}K\frac{q^2}{l^2}\left\{\left[\frac{1}{8} - \frac{\beta\sqrt{6}}{27}\right]\vec{i} + \left[\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\beta\sqrt{3}}{27} - \frac{\alpha}{3}\right]\vec{j}\right\}$$

La charge q_M en équilibre $\Longrightarrow \overrightarrow{F_M} = \vec{0} \Longrightarrow \begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{8} - \frac{\beta\sqrt{6}}{27} = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\beta\sqrt{3}}{27} - \frac{\alpha}{3} = 0 \end{cases}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \frac{\beta\sqrt{6}}{27} = \frac{1}{8} \\ \frac{\alpha}{3} = \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\beta\sqrt{3}}{27} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{27}{8\sqrt{6}} = \frac{9\sqrt{6}}{16} \\ \frac{\alpha}{3} = \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{9\sqrt{6}}{16}\frac{\sqrt{3}}{27} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{9\sqrt{6}}{16} \\ \alpha = \frac{6\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{16} \end{cases}.$$

Le Champ $\overrightarrow{E_M}$ Parallèle à Ox

La relation entre le Champ $\overrightarrow{E_M}$ et la Force $\overrightarrow{F_M}$ est donnée par :

$$\overrightarrow{E_M} = \frac{1}{q_M}\overrightarrow{F_M} = \frac{1}{\frac{3}{2}q}\overrightarrow{F_M} = -K\frac{q}{l^2}\left\{\left[\frac{1}{8} - \frac{\beta\sqrt{6}}{27}\right]\vec{\imath} \mp \left[\frac{\sqrt{3}}{8} \mp \frac{\beta\sqrt{3}}{27} - \frac{\alpha}{3}\right]\vec{\jmath}\right\}$$

Le Champ $\overrightarrow{E_M}$ est Parallèle à $Ox\ si$ $\begin{cases} E_x \neq 0 \\ E_y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{8} - \frac{\beta\sqrt{6}}{27} \neq 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{8} \mp \frac{\beta\sqrt{3}}{27} - \frac{\alpha}{3} = 0 \end{cases}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \beta \neq \frac{9\sqrt{6}}{16} \\ \alpha = 3\frac{\sqrt{3}}{8} \mp \frac{\beta\sqrt{3}}{9} \end{cases}.$$

Le Champ $\overrightarrow{E_M}$ Parallèle à Oy

La relation entre le Champ $\overrightarrow{E_M}$ et la Force $\overrightarrow{F_M}$ est :

$$\overrightarrow{E_M} = \frac{1}{q_M}\overrightarrow{F_M} = \frac{1}{\frac{3}{2}q}\overrightarrow{F_M} = -K\frac{q}{l^2}\left\{\left[\frac{1}{8} - \frac{\beta\sqrt{6}}{27}\right]\vec{i} \mp \left[\frac{\sqrt{3}}{8} \mp \frac{\beta\sqrt{3}}{27} - \frac{\alpha}{3}\right]\vec{j}\right\}$$

Le Champ $\overrightarrow{E_M}$ est Parallèle à $Oy\ si$ $\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{8} - \frac{\beta\sqrt{6}}{27} = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{8} \mp \frac{\beta\sqrt{3}}{27} - \frac{\alpha}{3} \neq 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{9\sqrt{6}}{16} \\ \alpha \neq \frac{6\sqrt{3}\mp 3\sqrt{2}}{16} \end{cases}.$$