Charges Ponctuelles sur un Triangle Équilatéral

Exercice 2

Trois charges électriques ponctuelles, $q_A = 2q$, $q_B = 2q$ et $q_O = -3q$ $(q > 0)$, forment un triangle équilatéral ABO d'arête a. Soit M le point d'intersection des trois hauteurs de ce triangle (figure ci-dessous).

1. Déterminer le champ électrostatique $\overrightarrow{E_M}$ au point M.

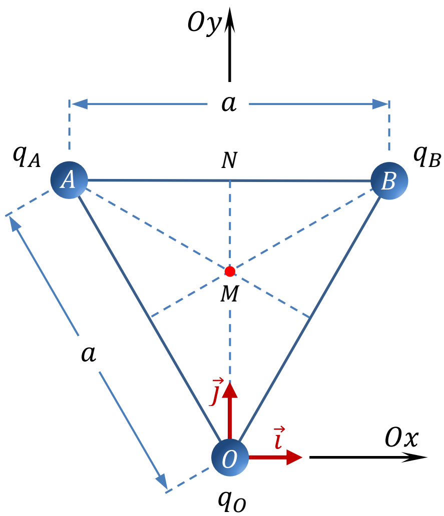
Soit une charge $Q = q$ qu'on place au point N.

2. Qu'elle est la variation $\Delta E_p(Q)$, de l'énergie potentielle électrostatique, de la charge Q, si on la déplace du point N au point M.

On suppose que les trois charges q_A, q_B et q_O, sont des sphères métalliques identiques, qu'on met en contact puis on les sépare.

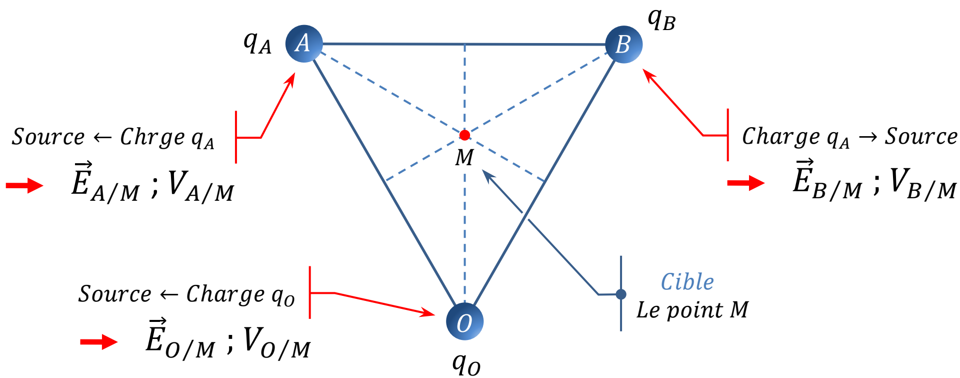
3. Déterminer les nouvelles charges de ces trois sphères.

Données : $q = 1\,\mu C$ et $a = 1{,}0\,m$.



1 – Identifier la Cible

Le champ E_M Produit au point M → Le point M est donc la Cible



2 – Le Principe de Superposition

$\overrightarrow{E_M}$ ⟶ 3 charges Sources → 3 Contributions ⟶ $\vec{E}_{A/M}, \vec{E}_{B/M}, \vec{E}_{O/M}$

Le Champ $\overrightarrow{E_M}$ est donné par le Principe de Superposition

$$\overrightarrow{E_M} = \vec{E}_{A/M} + \vec{E}_{B/M} + \vec{E}_{O/M}$$

tel que : $\vec{E}_{A/M} = K \dfrac{q_A}{r_{A/M}^2} \vec{u}_{A/M} \cdots$

$$\overrightarrow{E_M} = K \left\{ \frac{q_A}{r_{A/M}^2} \vec{u}_{A/M} + \frac{q_B}{r_{B/M}^2} \vec{u}_{B/M} + \frac{q_O}{r_{O/M}^2} \vec{u}_{O/M} \right\}$$

Département de Physique
Faculté des sciences
Université M'Hamed Bougara de Boumerdes

Physique-LMD.univ-boumerdes.dz

أحمد عبد الصمد تـاجي
قسـم الفيـزياء – (جـامعة محمد بوقرة - بومرداس)

3 – Charge Paramétrique q

Sachant que :

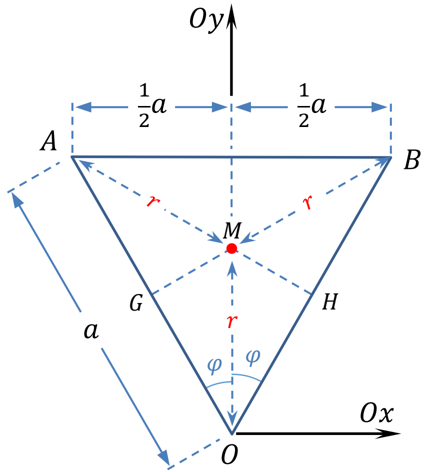
$$q_A = 2q \;\; ; \; q_B = 2q \;\text{ et }\; q_O = -3q$$

On remplace toutes les charges par la charge paramétrique q, d'où :

$$\overrightarrow{E_M} = K\left\{\frac{2q}{r_{A/M}^2}\vec{u}_{A/M} + \frac{2q}{r_{B/M}^2}\vec{u}_{B/M} + \frac{-3q}{r_{O/M}^2}\vec{u}_{O/M}\right\}$$

$$\overrightarrow{E_M} = Kq\left\{\frac{2}{r_{A/M}^2}\vec{u}_{A/M} + \frac{2}{r_{B/M}^2}\vec{u}_{B/M} - \frac{3}{r_{O/M}^2}\vec{u}_{O/M}\right\}$$

4 – Distance Paramétrique a



Triangle Rectangle
$\Longrightarrow 2\varphi = \frac{\pi}{3}$

On sait que $\widehat{OMH}$ est rectangle et $\varphi = \frac{\pi}{6}$,

d'où : $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\overline{OH}}{\overline{OM}}$.

Alors : $r = \overline{OM} = \frac{2}{\sqrt{3}}\overline{OH}$. Or, $\overline{OH} = \frac{1}{2}a$

ainsi, $r = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{2}a = \frac{a}{\sqrt{3}}$ et $r^2 = \frac{1}{3}a^2$. D'où :

$$r_{A/M}^2 = r_{B/M}^2 = r_{O/M}^2 = r^2 = \frac{1}{3}a^2$$

$$\overrightarrow{E_M} = K\frac{q}{r^2}\left\{2\vec{u}_{A/M} \mp 2\vec{u}_{B/M} - 3\vec{u}_{O/M}\right\}$$

$$\overrightarrow{E_M} = 3K\frac{q}{a^2}\left\{2\vec{u}_{A/M} \mp 2\vec{u}_{B/M} - 3\vec{u}_{O/M}\right\}$$

5 – Vecteurs Unitaires

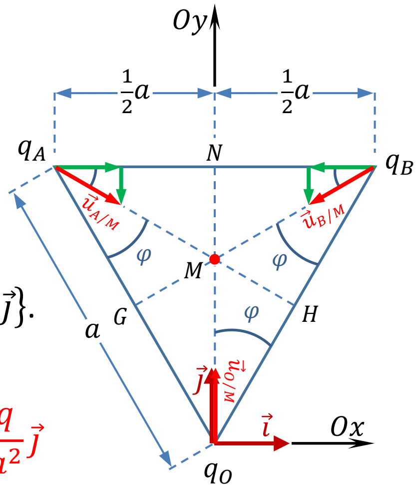
$\vec{u}$? Écrire les Vecteurs Unitaires dans la Base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$

$$\vec{u}_{A/M} = \cos\theta\,\vec{\imath} - \sin\theta\,\vec{\jmath} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath} - \frac{1}{2}\vec{\jmath}$$

$$\vec{u}_{B/M} = -\cos\theta\,\vec{\imath} - \sin\theta\,\vec{\jmath} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath} - \frac{1}{2}\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{E_M} = 3K\frac{q}{a^2}\left\{2\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath} - 2\frac{1}{2}\vec{\jmath} - 2\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath} - 2\frac{1}{2}\vec{\jmath} - 3\vec{\jmath}\right\}.$$

$$\overrightarrow{E_M} = 3K\frac{q}{a^2}(-2\vec{\jmath} - 3\vec{\jmath}) = -15K\frac{q}{a^2}\vec{\jmath}$$



La Variation de $Ep(Q)$ de O à M

$$\Delta Ep \longrightarrow E_p^{(N)}(Q) \rightarrow E_p^{(M)}(Q) \longrightarrow \Delta Ep = E_p^{(M)}(Q) - E_p^{(N)}(Q)$$

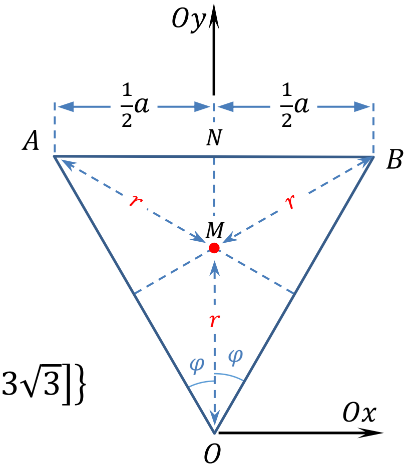
$$E_p^{(N)}(Q) = QV_N = Q\left[V_{A/N} \mp V_{B/N} \mp V_{O/N}\right]$$

$$E_p^{(M)}(Q) = QV_M = Q\left[V_{A/M} \mp V_{B/M} \mp V_{O/M}\right]$$

Avec $V_{A/M} = K\frac{q_A}{r_{A/M}} \cdots$

$$\Delta Ep = KQ\left\{\left[\frac{q_A}{r_{A/M}} \mp \frac{q_B}{r_{B/M}} \mp \frac{q_O}{r_{O/M}}\right] - \left[\frac{q_A}{r_{A/N}} \mp \frac{q_B}{r_{B/N}} \mp \frac{q_O}{r_{O/N}}\right]\right\}$$

Charge & Distance Paramétriques



Le triangle $\widehat{ONB}$ est rectangle d'où :

$$a^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + \overline{ON}^2 \Longrightarrow \overline{ON} = \sqrt{3}\,\frac{a}{2}.$$

Et $r = \frac{\sqrt{3}}{3}a.$

D'où :

$$\Delta Ep = K\frac{q^2}{a}\left\{\sqrt{3}[2 + 2 - 3] - [4 + 4 - 3\sqrt{3}]\right\}$$

$$\Delta Ep = 4K\frac{q^2}{a}\left\{\sqrt{3} - 2\right\}$$

Nouvelles Charges

En Utilisant le Principe de Conservation de la Charge Électrique, on trouve :

$$Avant \rightarrow Q_T = q_A \mp q_B \mp q_O = q \qquad Après \rightarrow Q'_T = q'_A \mp q'_B \mp q'_O$$

$$Donc \rightarrow q'_A \mp q'_B \mp q'_O = q$$

Or, les sphères sont métalliques, la charge est donc redistribuée sur la surface externe jusqu'à équilibre.

Les Sphères sont Identiques donc :

- Même Matériau $\Longrightarrow$ Même Densité.
- Même Rayon $\Longrightarrow$ Même charges.

$$q'_A = q'_B = q'_O = \frac{1}{3}q$$