Électrostatique – Charges Ponctuelles sur un Carré

Exercice

Quatre charges ponctuelles q_A, q_B, q_C et q_D, telles que $q_A = q_C = q$ et $q_B = q_D = -q$, sont placées aux sommets du carré $ABCD$ d'arête $2a$. Et une cinquième charge $q_O = 2q$ au centre O (figure ci-dessous).

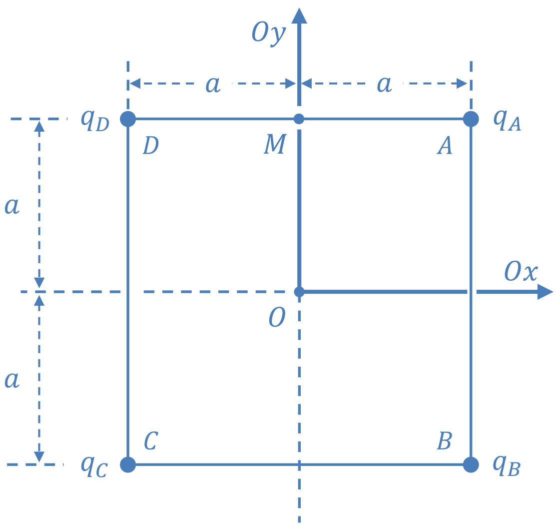
1. Déterminer le vecteur champ électrique $\overrightarrow{E_M}$ généré au point M.
2. Déterminer le potentiel V_M généré au point M.

On place au point M une charge q_M, telle que $q_M = -\frac{1}{2}q$.

3. Déduire et représenter la force $\overrightarrow{F_M}$ qui s'exerce sur la charge q_M.
4. Déduire l'énergie potentielle électrostatique de la charge q_M.

<u>Données</u> :

$q = 10^{-9}\,C$; $a = 10\,cm$; $K = 9 \cdot 10^9\,Nm^2C^{-2}$.



Le Champ $\overrightarrow{E_M}$ en M

$\overrightarrow{E_M}$ ⟶ La Cible est le point $M \Longrightarrow$ 5 charges → 5 Sources ⟶ $\vec{E}_{A/M}, \vec{E}_{B/M}, \vec{E}_{C/M}, \vec{E}_{D/M}, \vec{E}_{O/M}$

Le Principe de Superposition donne :

$$\overrightarrow{E_M} = \vec{E}_{A/M} + \vec{E}_{B/M} + \vec{E}_{C/M} + \vec{E}_{D/M} + \vec{E}_{O/M}$$

où $\vec{E}_{A/M} = K\,\dfrac{q_A}{r_{A/M}^2}\,\vec{u}_{A/M} \cdots$

$$\overrightarrow{E_M} = K\left\{\frac{q_A}{r_{A/M}^2}\vec{u}_{A/M} + \frac{q_B}{r_{B/M}^2}\vec{u}_{B/M} + \frac{q_C}{r_{C/M}^2}\vec{u}_{C/M} + \frac{q_D}{r_{D/M}^2}\vec{u}_{D/M} + \frac{q_O}{r_{O/M}^2}\vec{u}_{O/M}\right\}$$

Calcul

$\overrightarrow{E_M}$?

Avec : $q_A = q_C = q$; $q_B = q_D = -q$ et $q_O = 2q$

et : $r_{A/M} = r_{D/M} = r_{O/M} = a$; $r_{C/M} = r_{B/M} = \sqrt{5}a$

$$\overrightarrow{E_M} = Kq\left\{\frac{1}{r_{A/M}^2}\vec{u}_{A/M} + \frac{-1}{r_{B/M}^2}\vec{u}_{B/M} + \frac{1}{r_{C/M}^2}\vec{u}_{C/M} + \frac{-1}{r_{D/M}^2}\vec{u}_{D/M} + \frac{2}{r_{O/M}^2}\vec{u}_{O/M}\right\}$$

$$\overrightarrow{E_M} = K\frac{q}{a^2}\left(\vec{u}_{A/M} - \frac{1}{5}\vec{u}_{B/M} + \frac{1}{5}\vec{u}_{C/M} - \vec{u}_{D/M} + 2\vec{u}_{O/M}\right)$$

$$\overrightarrow{E_M} = K\frac{q}{a^2}\left(2\vec{u}_{A/M} - \frac{1}{5}\vec{u}_{B/M} + \frac{1}{5}\vec{u}_{C/M} + 2\vec{u}_{O/M}\right)$$

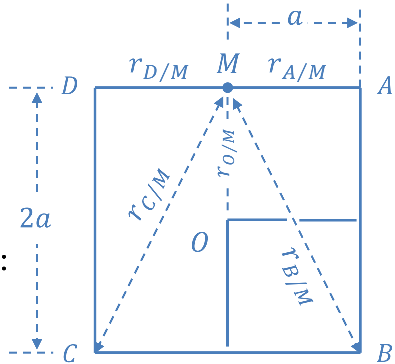
$\vec{u}_{A/M} = ?$

$\vdots$

$\vec{u}_{O/M} = ?$

Distances

OM est un axe de symétrie



On a $r_{A/M} = r_{D/M} = a$

$\Longrightarrow r_{A/M}^2 = r_{D/M}^2 = a^2$

Aussi, $r_{C/M} = r_{B/M}$

Or, du triangle DMC on a (Th. de Pythagore) :

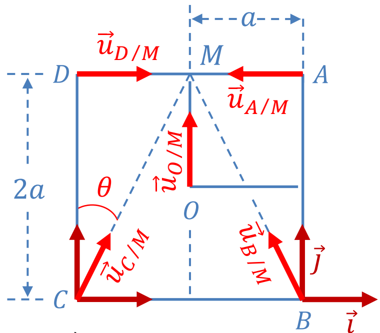
$$r_{C/M}^2 = a^2 + (2a)^2 = a^2 + 4a^2 = 5a^2$$

D'où : $r_{C/M}^2 = r_{B/M}^2 = 5a^2$ et $r_{C/M} = r_{B/M} = \sqrt{5}a$

Vecteurs Unitaires

Du triangle CDM

$\sin\theta = \frac{a}{\sqrt{5}a}$ et $\cos\theta = \frac{2a}{\sqrt{5}a}$



$\vec{u}$ ⟶ On écrit les Vecteurs Unitaires sur la Base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$

$$\vec{u}_{A/M} = -\vec{\imath} \quad ; \quad \vec{u}_{B/M} = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{u}_{C/M} = \sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath} \quad ; \quad \vec{u}_{D/M} = \vec{\imath} \text{ et}$$

$$\vec{u}_{O/M} = \vec{\jmath}.$$

$$\overrightarrow{E_M} = K\frac{q}{a^2}\left(\vec{u}_{A/M} - \frac{1}{5}\vec{u}_{B/M} + \frac{1}{5}\vec{u}_{C/M} - \vec{u}_{D/M} + 2\vec{u}_{O/M}\right)$$

$$= K\frac{q}{a^2}\left\{-\vec{\imath} - \frac{1}{5}(-\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}) + \frac{1}{5}(\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}) - \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}\right\}$$

Résultat

Du triangle CDM

$$\sin\theta = \frac{a}{\sqrt{5}a} = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ et } \cos\theta = \frac{2a}{\sqrt{5}a} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\overrightarrow{E_M} = K\frac{q}{a^2}\left\{\frac{2}{5}\sin\theta\,\vec{\imath} - 2\vec{\imath} \mp 2\vec{\jmath}\right\}$$

$$\overrightarrow{E_M} = 2K\frac{q}{a^2}\left\{\left(\frac{\sqrt{5}}{25} - 1\right)\vec{\imath} \mp \vec{\jmath}\right\}$$

$$\overrightarrow{E_M} = 1800(-0{,}9\vec{\imath} \mp \vec{\jmath})[V/m]$$

Le Potentiel en M

V_M $\longrightarrow$ La Cible est le point M
5 charges → 5 Sources $\longrightarrow$ $V_{A/M}, V_{B/M}, V_{C/M}, V_{D/M}, V_{O/M}$

Le Potentiel V_M est la Somme des Potentiels

$$V_M = V_{A/M} \mp V_{B/M} \mp V_{C/M} \mp V_{D/M} \mp V_{O/M}$$

$$\text{où } V_{A/M} = K\frac{q_A}{r_{A/M}} \cdots$$

$$V_M = K\left\{\frac{q_A}{r_{A/M}} \mp \frac{q_B}{r_{B/M}} \mp \frac{q_C}{r_{C/M}} \mp \frac{q_D}{r_{D/M}} \mp \frac{q_O}{r_{O/M}}\right\}$$

Calcul de V_M

On a : $q_A = q_B = q$; $q_C = q_D = -q$ et $q_O = 2q$

$$V_M = K\left\{\frac{q}{r_{A/M}} + \frac{-q}{r_{B/M}} + \frac{q}{r_{C/M}} + \frac{-q}{r_{D/M}} + \frac{2q}{r_{O/M}}\right\}$$

Or, $r_{A/M} = r_{D/M} = a$; $r_{C/M} = r_{B/M} = \sqrt{5}a$

$$V_M = K\frac{q}{a}\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5} - 1 + 2\right)$$

$$V_M = 2K\frac{q}{a}$$

$$V_M = 180\,V$$

La Force exercée sur la Charge q_M

Relation entre
La Force $\overrightarrow{F_M}$ et
Le Champ $\overrightarrow{E_M}$

Force exercée sur q_M $$\overrightarrow{F_M} = q_M\overrightarrow{E_M} = -\frac{1}{2}q\overrightarrow{E_M}$$

$$\overrightarrow{F_M} = -K\frac{q^2}{a^2}(-0{,}9\vec{\imath} \mp \vec{\jmath})$$

$$\overrightarrow{F_M} = -9 \cdot 10^{-7}(-0{,}9\vec{\imath} \mp \vec{\jmath})[N]$$

L'Énergie Potentielle de la Charge q_M

Relation entre
L'Énergie Potentielle $E_p(q_M)$ et
Le Potentiel V_M $\longrightarrow$

L'Énergie Potentielle de q_M

$$E_p(q_M) = q_M V_M = -\frac{1}{2} q V_M$$

$$E_p(q_M) = -K\frac{q^2}{a}$$

$$E_p(q_M) = -9 \cdot 10^{-8}\, J$$