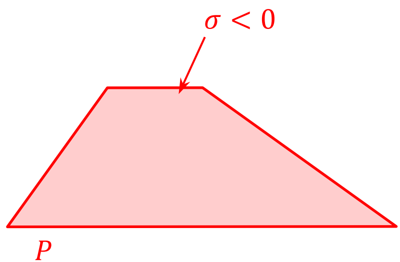
Théorème de Gauss – Plan Infini

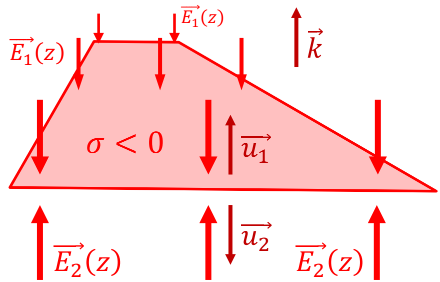
Exercice

Soit un plan métallique infini P de densité de charge superficielle $\sigma < 0$.

1. Déterminer par le théorème de Gauss l'expression du champ électrique $\vec{E}$ dans tout l'espace.
2. Déduire l'expression du potentiel V sachant que le plan est relié à une source de tension $V_0 = -100\,V$.



Théorème de Gauss



$$\phi = \oiint_{S_G} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Le Plan est Infini, le champ produit est alors Uniforme et ⊥ au plan. Il est donc indépendant de x et de y.

Pour $\sigma < 0$, $\vec{E_i}(z)$ et $\vec{u_i}$ sont opposés.
$\vec{E_1}(z) = -E(z)\,\vec{u_1} = -E(z)\,\vec{k}$ au-dessus du plan infini,
$\vec{E_2}(z) = -E(z)\,\vec{u_2} = E(z)\,\vec{k}$ au-dessous du plan infini.

Calcul du Flux – 1

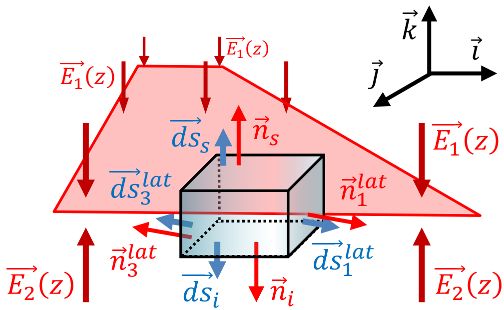
$$\phi = \iint_{S_i} E(z)\,\vec{k}\cdot\vec{n}_i\,ds_i - \iint_{S_s} E(z)\,\vec{k}\cdot\vec{n}_s\,ds_s \mp \sum_{m=1}^{4}\iint_{S_{l(m)}} E(z)\,\vec{k}\cdot\vec{n}_{l(m)}\,ds_{l(m)}$$

Tel que : $\overrightarrow{ds} = \vec{n}\,ds$

$$\vec{n}_{l(m)} \perp \vec{k} \text{ sur } S_G \rightarrow \vec{n}_{l(m)}\cdot\vec{k} = 0$$

$$\vec{n}_s\cdot\vec{k} = 1 \text{ et } \vec{n}_i\cdot\vec{k} = -1$$

$$\sum_{m=1}^{4}\iint_{S_{l(m)}} E(z)\,\vec{k}\cdot\vec{n}_{l(m)}\,ds_{l(m)} = 0$$



Calcul du Flux – 2

$$\phi = \iint_{S_i} E(z)\,\vec{k}\cdot\vec{n}_i\,ds_i - \iint_{S_s} E(z)\,\vec{k}\cdot\vec{n}_s\,ds_s$$

$\vec{n}_s \cdot \vec{k} = 1$ et $\vec{n}_i \cdot \vec{k} = -1$ et z est Cst sur S_G donc $E(z)$ est Cst

$$\phi = -\iint_{S_s} E(z)\,ds_s - \iint_{S_i} E(z)\,ds_i = -E(z)\left(\iint_{S_s} ds_{sup} \mp \iint_{S_i} ds_{inf}\right)$$

$$\phi = -E(z)\,2(S_s \mp S_i)$$

Avec $\iint_{S_s} ds_s = S_s = \iint_{S_i} ds_i = S_i$ $\qquad \phi = -2\,E(z)\,S_s$

Charge Intérieure

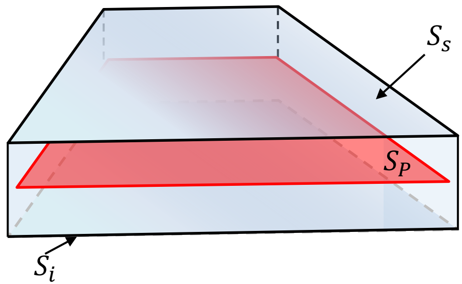
$$\sum q_{int} = Q_P = \sigma S_P$$

$$\phi = -2\,E(z)\,S_s = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S_P}{\varepsilon_0}$$

$$-2\,E(z)\,S_P = \frac{\sigma S_P}{\varepsilon_0}$$

$$E(z) = E = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

À l'infini les trois surfaces deviennent équivalentes :
$S_s = S_i \approx S_P$



Déduction du Potentiel

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \Longrightarrow \int dV = -\int E(z)\, dz$$

$$\int dV = V(z) \mp C' = -\int E(z)\, dz = -\int \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} dz$$

$$V(z) \mp C' = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \int dz = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} z \mp C''$$

$$V(z) = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} \mp C \qquad V(0) = C = -100\, V$$

$$V(z) = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} - 100$$