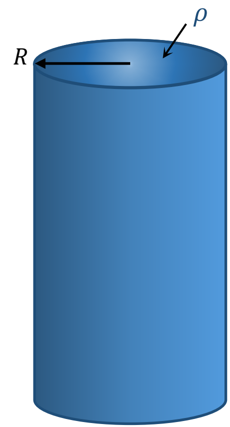
Potentiel & Champ d'un Cylindre Infiniment Long 2

Exercice 10

Soit un cylindre infiniment long de rayon R, muni d'une distribution de charge électrique volumique $\rho = \rho_0 r$ où ρ_0 est une constante positive.

1. Calculer la charge électrique totale du cylindre.
2. Déterminer, en utilisant le théorème de Gauss, le vecteur champ électrique $\vec{E}(r)$ produit par ce cylindre, dans tout l'espace.
3. Déduire, le potentiel électrique $V(r)$ produit par ce cylindre, dans tout l'espace.
   Utiliser le fait que $V(R) = V_0$.

La Charge Électrique Totale



Le cylindre ***isolant*** a une densité de charges volumique

- $\rho = \frac{dq}{dv}$ telle que : dq et dv sont respectivement les éléments infinitésimaux de charge et de volume. D'où : $dq = \rho\, dv = \rho_0 r\, dv$
- La densité ρ est radiale donc :

$$dv = r\, dr\, d\theta\, dz = h 2\pi r\, dr$$

$$\int_0^Q dq = Q = \int_0^R (\rho_0 r) h 2\pi r\, dr = h 2\pi \rho_0 \int_0^R r^2\, dr = \frac{2\pi}{3} \rho_0 h R^3$$

Calcul du Flux

$$\phi = \iint_{S_s} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds_s} + \iint_{S_l} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds_l} + \iint_{S_i} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds_i} \ /$$

$$\overrightarrow{ds_s} = \overrightarrow{n_s}\, ds_s,\ \overrightarrow{ds_l} = \overrightarrow{n_l}\, ds_l \text{ et } \overrightarrow{ds_i} = \overrightarrow{n_i}\, ds_i$$

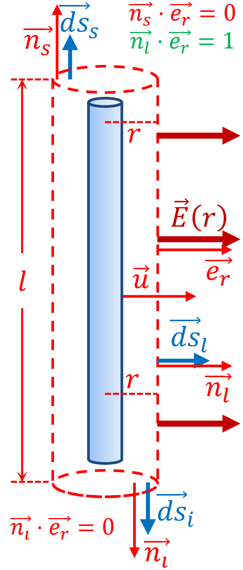
$$\iint_{S_s} E(r)\, \overrightarrow{e_r} \cdot \overrightarrow{n_s}\, ds_s = \iint_{S_s} E(r)\, \overrightarrow{e_r} \cdot \overrightarrow{n_i}\, ds_i = 0 \Longrightarrow$$

$$\phi = \iint_{S_l} E(r)\, \overrightarrow{e_r} \cdot \overrightarrow{n_l}\, ds_l = \iint_{S_l} E(r)\, ds_l$$

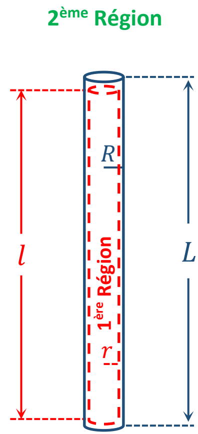
Cylindre $\infty \Longrightarrow E(r) = Cst$ sur tout S_l où $r = cst$, ainsi

$$\phi = E(r) \iint_{S_l} ds_l = E(r)\, S_l$$

S_l : cylindre de rayon $r \Longrightarrow S_l = 2\pi r l \Longrightarrow \phi = E(r)\, 2\pi r l$



Calcul du Vecteur Champ $\vec{E}(r)$ – 1



$$\phi = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0} = 2\pi r l\, E(r) = 2\pi r L\, E(r), \text{ car à } \infty : l \approx L$$

- **1ère Région : $r < R$**

S_G ne contient qu'une partie $q(r)$ de la charge.

$$\int_0^q dq = q(r) = \rho_0 2\pi L \int_0^r r^2\, dr = \frac{2\pi}{3}\rho_0 L r^3$$

$$E_1(r)\, 2\pi r L = \frac{2\pi}{3\varepsilon_0}\rho_0 L r^3 \Longrightarrow \overrightarrow{E_1}(r) = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} r^2 \overrightarrow{e_r}$$

Calcul du Vecteur Champ $\vec{E}(r)$ – 2

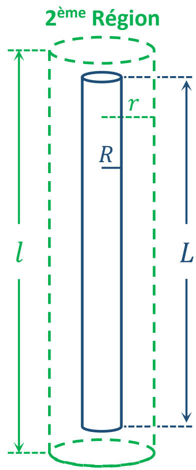
$$\phi = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0} = 2\pi rl\, E(r) = 2\pi rL\, E(r), \text{ car à } \infty : l \approx L$$

- **2ème Région : $r > R$**

S_G contient tout le cylindre $\Longrightarrow \sum q_{int} = Q = \frac{2\pi}{3}\rho_0 L R^3$.

$$E_2(r)\, 2\pi r L = \frac{2\pi}{3\varepsilon_0}\rho_0 L R^3 \Longrightarrow E_2(r) = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} R^3 \frac{1}{r} \Longrightarrow$$

$$\overrightarrow{E_2}(r) = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r}\overrightarrow{e_r}$$



Déduction du Potentiel $V(r)$

$$\int dV = -\int E(r)\,dr$$

- **1ère Région : $r < R$**

$$V_1(r) = -\int E_1(r)\,dr \mp c_1 = -\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\int r^2\,dr \mp c_1 = -\frac{\rho_0}{9\varepsilon_0}r^3 \mp c_1' \mp c_1 \Longrightarrow$$

$$V_1(r) = -\frac{\rho_0}{9\varepsilon_0}r^3 \mp C_1.$$

- **2ème Région : $r > R$**

$$V_2(r) = -\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}R^3\int \frac{1}{r}dr \mp c_2 = -\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}R^3 \ln r \mp c_2' \mp c_2 \Longrightarrow$$

$$V_2(r) = -\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}R^3 \ln r \mp C_2.$$

Département de Physique
Faculté des sciences
Université M'Hamed Bougara de Boumerdes

Physique-LMD.univ-boumerdes.dz

أحمد عبد الصمد تـاجي
قســم الفيــزياء – (جــامعة محمد بوقرة - بومرداس)

Calcul des Constantes

$V(r = R) = V_0$ est une condition valable pour les deux régions à la fois.

- **1ère Région : $r < R$**

$$V_1(r = R) = -\frac{\rho_0}{9\varepsilon_0}R^3 \mp C_1 = V_0 \Longrightarrow C_1 = V_0 \mp \frac{\rho_0}{9\varepsilon_0}R^3$$

$$V_1(r) = V_0 \mp \frac{\rho_0}{9\varepsilon_0}(R^3 - r^3)$$

- **2ème Région : $r > R$**

Le potentiel est une fonction continue, donc à la limite $r = R$ on a :

$$V_1(R) = V_2(R) \Longrightarrow V_0 = -\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}R^3 \ln R \mp C_2 \Longrightarrow C_2 = V_0 \mp \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}R^3 \ln R \Longrightarrow$$

$$V_2(r) = -\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\ln\frac{r}{R} \mp V_0$$