Série N° 1 – Rappel Mathématique

Dans tout ce qui suit, on considère un repère orthonormé de vecteurs unitaires $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$.

Exercice 1

Soient les vecteurs $\overrightarrow{v_1} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}$, $\overrightarrow{v_2} = 2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} - 3\vec{k}$ et $\overrightarrow{v_3} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}$.

1. Trouver les modules de $\overrightarrow{v_3}$ et $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}$.
2. Trouver les angles $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ et $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_3})$.

Exercice 2

Reprendre les vecteurs de l'exercice 1 et trouver le résultat s'il existe, en précisant la nature (scalaire ou vecteur) de :

$(\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2}) \wedge \overrightarrow{v_3}$, $\overrightarrow{v_1} \cdot (\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_3})$ et $\overrightarrow{v_1} \cdot (\overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_3})$.

Exercice 3

Soient les vecteurs $\overrightarrow{v_1} = \sin t\, \vec{\imath} + \cos t\, \vec{\jmath} + t\vec{k}$, $\overrightarrow{v_2} = e^{-t}\vec{\imath} + 2\cos 3t\, \vec{\jmath} + 2\sin 3t\, \vec{k}$.

- Déterminer le module de chaque vecteur.
- Calculer : $\frac{d\overrightarrow{v_1}}{dt}$ et $\frac{d\overrightarrow{v_2}}{dt}$, puis le module de chacun deux.

Exercice 4 (Analyse Dimensionnelle)

Soit un pendule simple constitué d'une masse m accrochée à un fil de masse négligeable et de longueur l. On travaille dans le référentiel terrestre où le champ de gravitation est $\vec{g}$.

1. Montrer, par une analyse dimensionnelle, que la période T des petites oscillations de ce pendule s'écrit sous la forme $T = Cst\sqrt{\frac{l}{g}}$.
2. Quelle remarque concernant T mérite-t-elle d'être notée ?

Exercice 5 (Analyse Dimensionnelle)

Soit un gaz enfermé dans un récipient, la pression P qu'exerce ce gaz est due aux chocs des molécules sur la paroi interne. À priori P dépend de la densité n du gaz (n est le nombre des molécules par m^3), de la masse m de chaque molécule et de la vitesse moyenne $\bar{v}$ de leur déplacement.

- En utilisant l'analyse dimensionnelle, trouver la formule de la pression P à une constante près.

Exercice 6

Une force $\vec{F} = 5\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 2\vec{k}\ (N)$ provoque le mouvement d'un corps qui se déplace suivant le vecteur déplacement : $\vec{L} = 3\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 4\vec{k}\ (m)$.

1. Trouver $W = \vec{F} \cdot \vec{L}$ (le travail de la force $\vec{F}$).
2. Déduire la projection de la force $\vec{F}$ sur le vecteur déplacement $\vec{L}$.
3. Trouver la relation entre les composantes du vecteur déplacement $\vec{d} = \alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath} + \gamma\vec{k}$, pour que le travail de $\vec{F}$ soit nul.

Exercice 7 (À traiter en Cours)

Soit $\vec{A} = 5X^2\vec{\imath} + (2X + 1)\vec{\jmath} - 2\vec{k}$ et $\vec{B} = 5\vec{\imath} + (2X^2 - X)\vec{\jmath} + 2X\vec{k}$.

1. Déterminer $\vec{A}$ et $\vec{B}$ dans le cas où $X = 0$ et $X = 1$.
2. Calculer $\frac{d}{dt}\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right)$ de deux manières différentes.

Soit $G(X, Y, Z) = 3X^2 + 9XY - 6Y^2Z - 3XZ + 5XYZ^2$ une fonction dans l'espace cartésien.

1. Calculer $\vec{D} = \overrightarrow{grad\, G}$.

Soit $\vec{C}(x, y, z) = (x^2 + 1)\vec{\imath} + (x + 5z)\vec{\jmath} - (y^2 + 3X)\vec{k}$.

2. Calculer $\overrightarrow{rot\, \vec{C}} = \vec{\nabla} \wedge \vec{C}$.

Exercice 8 (Calcul d'Incertitudes)

Une masse m est lâchée d'une hauteur h. À son arrivée au sol, sa vitesse est $v = \sqrt{2gh}$. Si la hauteur $h = 53{,}6\, m$ est mesurée avec une erreur de $1\, cm$ et l'accélération gravitationnelle $g = 9{,}81\, m/s^2$ est connue avec une précision de $0{,}1\%$, estimer l'incertitude sur la valeur de la vitesse calculée.