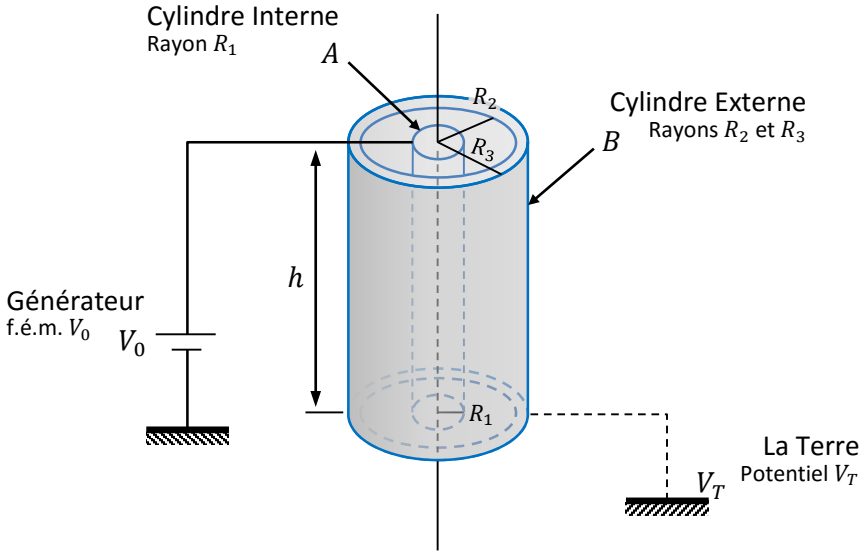
Examen Provisoire Online ST 2020-2021
ST (17, 18, 37 & 38)

Exercice 2

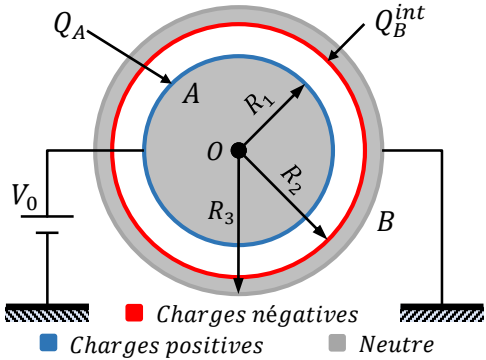
Soient deux cylindres métalliques A et B coaxiaux et de même hauteur h. A est de rayon R_1 et de charge Q. B creux est de rayons R_2 et R_3 et initialement neutre. A est relié à un générateur de tension et B à la terre (figure ci-dessous).

1. Représenter les différentes distributions de charges sur A et B.
2. Déterminer par le théorème de Gauss l'expression du vecteur champ électrique dans tout l'espace.
3. Déduire la différence de potentielle $V(R_1) - V(R_2)$.
4. Donner la définition de la capacité C d'un condensateur.
5. Déduire la capacité C du condensateur ci-dessous en fonction des rayons et de la hauteur h.



Les distributions de charges

Le cylindre A est relié à la borne positive du générateur, il porte donc des **charges positives sur sa surface**[1] **externe**. Ces charges positives attirent les **charges négatives à la surface interne du cylindre *B*** et repoussent les **charges positives à la surface externe du cylindre *B***. Cette dernière est reliée à la terre, qui par son apport de charges négatives **neutralise la surface externe du cylindre *B***.



[1] A et B sont deux cylindres métalliques conducteurs, ils ont donc des distributions **superficielles** continues de charges.

La Surface de Gauss

À cause de la symétrie cylindrique du système, on choisit un cylindre fermé comme surface de Gauss.
On suppose que la hauteur $h \to \infty$, ou on néglige les effets de bords. Ainsi le vecteur champ $\vec{E}(r)$ est radial ;

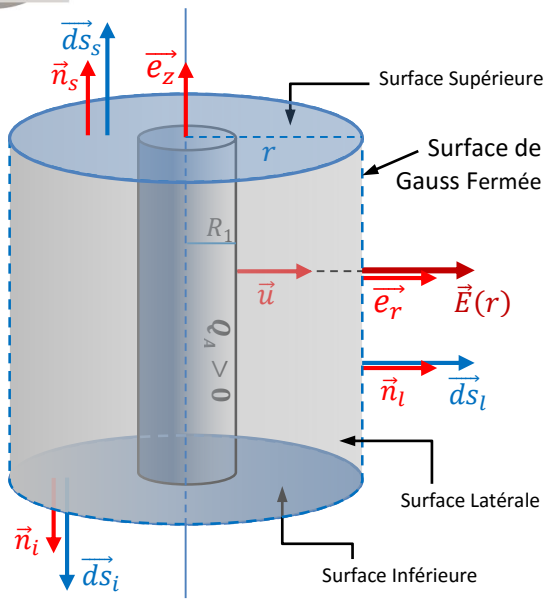
$$\vec{E}(r) = E(r)\,\vec{u} = E(r)\,\vec{e_r}.$$

Les $\vec{n}$ sont sortants et $\perp$ à leurs surfaces respectives avec $\vec{ds} = ds\,\vec{n}$.

Aussi $\vec{n}_l \parallel \vec{e_r} \Longrightarrow \vec{n}_l \cdot \vec{e_r} = 1,$

$$\vec{n}_i \perp \vec{e_r} \Longrightarrow \vec{n}_i \cdot \vec{e_r} = 0,$$

$$\vec{n}_s \perp \vec{e_r} \Longrightarrow \vec{n}_s \cdot \vec{e_r} = 0.$$



Le Théorème de Gauss

La première partie du théorème de Gauss ; $\phi = \oiint_{S_G} \vec{E}(r) \cdot \overrightarrow{ds} = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$, devient :

en intégrant sur chaque surface de la sorte :

$$\phi = \iint_s \vec{E}(r) \cdot \overrightarrow{ds_s} + \iint_i \vec{E}(r) \cdot \overrightarrow{ds_i} + \iint_l \vec{E}(r) \cdot \overrightarrow{ds_l}.$$

Ou en utilisant les propriétés des vecteurs éléments de surfaces $\overrightarrow{ds} = \vec{n}\, ds$:

$$\phi = \iint_s E(r)\, \overrightarrow{e_r} \cdot \vec{n}_s\, ds_s + \iint_i E(r)\, \overrightarrow{e_r} \cdot \vec{n}_i\, ds_i + \iint_l E(r)\, \overrightarrow{e_r} \cdot \vec{n}_l\, ds_l.$$

Comme $\vec{n}_l$ est ∥ à $\overrightarrow{e_r}$ alors que $\vec{n}_s$ et $\vec{n}_i$ sont ⊥ à $\overrightarrow{e_r}$ donc :

$$\phi = \iint_l E(r)\, ds_l.$$

$E(r) = cst$ sur toute la surface latérale de rayon fixe r.

$$\phi = E(r) \iint_l ds_l = E(r)\, S_l.$$

Vu que $S_l = 2\pi r l$ et que à l'infini $l \approx h$ (du cylindre).

on obtient : $\vec{E}(r) = E(r)\, \overrightarrow{e_r} = \frac{\sum q_{int}}{2\pi\varepsilon_0 r h} \overrightarrow{e_r}$. □

Le Champ dans tout l'Espace

$\vec{E}(r) = E(r)\,\vec{e_r} = \frac{\sum q_{int}}{2\pi\varepsilon_0 hr}\vec{e_r}$. □ avec :

Région1 : $\sum q_{int} = 0$;

$$\vec{E_1}(r) = \vec{0} \blacksquare$$

Région2 : $\sum q_{int} = Q_A$

$$Q_A = S_l^{(A)}\sigma_A = 2\pi R_1 h\sigma_A \;;$$

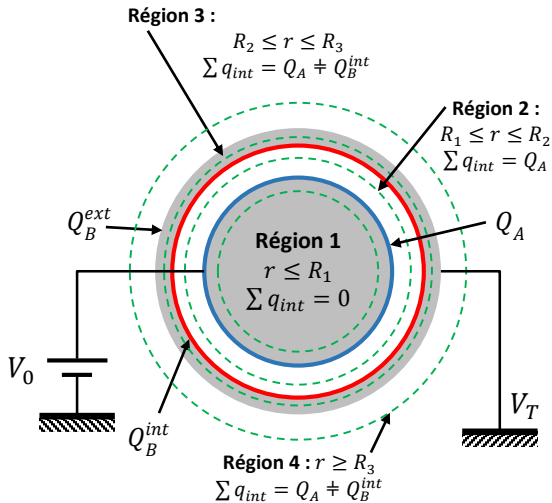
$$\vec{E_2}(r) = \frac{Q_A}{2\pi\varepsilon_0 hr}\vec{e_r} = \frac{R_1\sigma_A}{\varepsilon_0 r}\vec{e_r} \blacksquare$$

Région3 : $\sum q_{int} = Q_A + Q_B^{int} = 0$;

$$\vec{E_3}(r) = \vec{0} \blacksquare$$

Région4 : $\sum q_{int} = Q_A + Q_B^{int} = 0$;

$$\vec{E_4}(r) = \vec{0} \blacksquare$$



La Différence de Potentiel $V(R_1) - V(R_2)$

On sait que : $\int dV = -\int E(r)\,dr$. Or entre R_1 et R_2 on peut écrire que :

$$\int_{R_1}^{R_2} dV = -\int_{R_1}^{R_2} E(r)\,dr. \square$$

Aussi, entre R_1 et R_2 on est dans la région 2. On utilise donc l'expression :

$$\overrightarrow{E_2}(r) = \frac{Q_A}{2\pi\varepsilon_0 hr}\overrightarrow{e_r} \blacksquare$$

L'intégrale ci-dessus devient alors[1] :

$$V(R_2) - V(R_1) = -\frac{Q_A}{2\pi\varepsilon_0 h}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} = -\frac{Q_A}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln r\Big|_{R_1}^{R_2} = -\frac{Q_A}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln\frac{R_2}{R_1}.$$

donc :

$$V(R_1) - V(R_2) = \frac{Q_A}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln\frac{R_2}{R_1}. \blacksquare$$

[1] Comme ces intégrales sont définies, les constants sont alors automatiquement éliminées.

La Capacité du Condensateur

La capacité du condensateur est donnée par définition par :

$$C = \frac{Q_A}{\Delta V}$$

Or, ΔV est la différence de potentiel $V(R_1) - V(R_2)$, telle que :

$$V(R_1) - V(R_2) = \frac{Q_A}{2\pi\varepsilon_0 h} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

D'où :

$$C = \frac{Q_A}{\frac{Q_A}{2\pi\varepsilon_0 h} \ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

Donc : $C = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$. ■