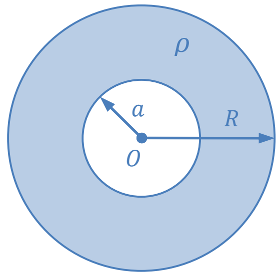
Électrostatique - Sphère à Densité de Charges Volumique

Exercice [1]

Une sphère de rayon R possède une cavité de rayon a. Une charge est repartie uniformément sur le volume limité par a et R.

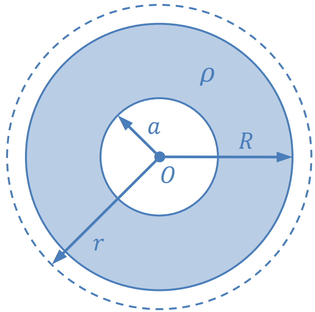
- Calculer et tracer $E(r)$ et $V(r)$ dans tout l'espace.

On prendra $V(\infty) = 0$.



[1] Exercice 10 – Série 1 ST – UMBB 2019-2020

Surface de Gauss



Théorème de Gauss

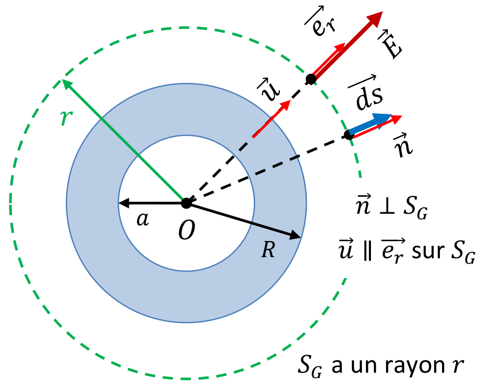
$$\phi = \oint_{S_G} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Comme le système a une symétrie sphérique

- On utilise les coordonnées sphériques
- Choix de la surface de Gauss → une Sphère Cible de rayon r.
- Le vecteur champ $\vec{E}$ est radial et s'écrit

$$\vec{E} = E(r)\,\overrightarrow{e_r} \text{ avec } E(r) \text{ constant}$$

Calcul du Flux



$$\phi = \oint_{S.G.} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = \oint_{S_G} E(r)\,\overrightarrow{e_r} \cdot \overrightarrow{ds}$$

$$\overrightarrow{ds} = \vec{n}\, ds$$

$\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal à S_G

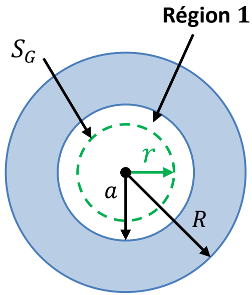
$$\vec{n} \parallel \overrightarrow{e_r} \rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{e_r} = 1$$

S_G a un rayon r
Fixe donc $E(r)$ est
Constant sur S_G

$$\phi = E(r) \oint_{S.G.} \overrightarrow{e_r} \cdot \vec{n}\, ds = E(r) \oint_{S.G.} ds = E(r)\, S_G$$

S_G sphère de rayon $r \rightarrow S_G = 4\pi r^2 \implies \phi = 4\pi r^2\, E(r)$

$\sum q_{int}$ - Région 1



$$E(r) = \frac{1}{4\pi r^2}\phi = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

1er cas : $r \leq a$

S_G se trouve dans la région vide

$$\sum q_{int} = 0$$

$$E_1(r) = 0 \rightarrow \overrightarrow{E_1}(r) = \vec{0}$$

$\sum q_{int}$ - Région 2

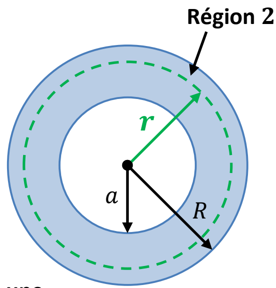
$2^{ème}$ cas : $a \leq r \leq R$

ρ est $cste$, $\sum q_{int} = \rho V_{mat}$ où V_{mat} est le volume de matière dans S_G

$$\sum q_{int} = (V_{S_G} - V_{cavité})\rho = \left(\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi a^3\right)\rho$$

$$E_2(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{4}{3}\pi(r^3 - a^3)\rho$$

$$\overrightarrow{E_2}(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r - \frac{a^3}{r^2}\right)\overrightarrow{e_r}$$



S_G englobe **une partie** de la charge Q

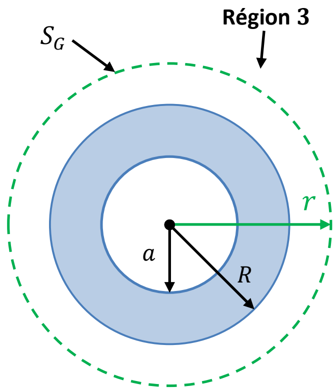
$\sum q_{int}$ - Région 3

$$E(r) = \frac{1}{4\pi r^2}\phi = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

3ème cas : $r \geq R$

$$\sum q_{int} = q = \rho\frac{4}{3}\pi(R^3 - a^3)$$

$$E_3(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Longrightarrow \overrightarrow{E_3}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{e_r}$$



S_G englobe toute la charge Q de la sphère chargée

Déduction du Potentiel

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \Longrightarrow \int dV = V \mp c = -\int E(r)\, dr$$

$$V_1(r) = -\int E_1(r)\, dr \mp c = C_1$$

$$V_2(r) = -\int E_2(r)\, dr \mp c' = \int \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{a^3}{r^2} - r\right) dr \mp c' = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} - \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r} \mp C_2$$

$$V_3(r) = -\int E_3(r)\, dr \mp c'' = -\int \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr \mp c'' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \mp C_3$$

Les constantes seront déterminées par les conditions limites

Conditions Limites 1

La condition limite $V(\infty) = 0$ n'est applicable que dans la 3ème Région où $r \geq R$. Car c'est la seul région où r peut tendre vers l'infini
Les deux autres régions sont limitées par a ou R

$$V_3(r \to \infty) = \lim_{r\to\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_3 = C_3$$

$$\text{Car } \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} = 0 \text{ donc } C_3 = 0$$

$$V_3(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0 r}(R^3 - a^3)$$

Conditions Limites 2

Comme le potentiel est une fonction continue, alors sur toute la surface de la sphère de rayon $r = R$ on a : $V_2(r = R) = V_3(r = R)$

$$V_2(R) = -\frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0} - \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 R} \mp C_2 = V_3(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$\text{Or : } \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0 R}\frac{4\pi}{3}(R^3 - a^3) \implies$$

$$-\frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0} - \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 R} \mp C_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0 R}(R^3 - a^3) \implies C_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{3R^2}{2}$$

$$V_2(r) = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{2} \mp \frac{a^3}{r}\right) \mp \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{2}$$

Conditions Limites 3

$$\text{En } r = a \rightarrow V_1 = C_1 = V_2(r = a)$$

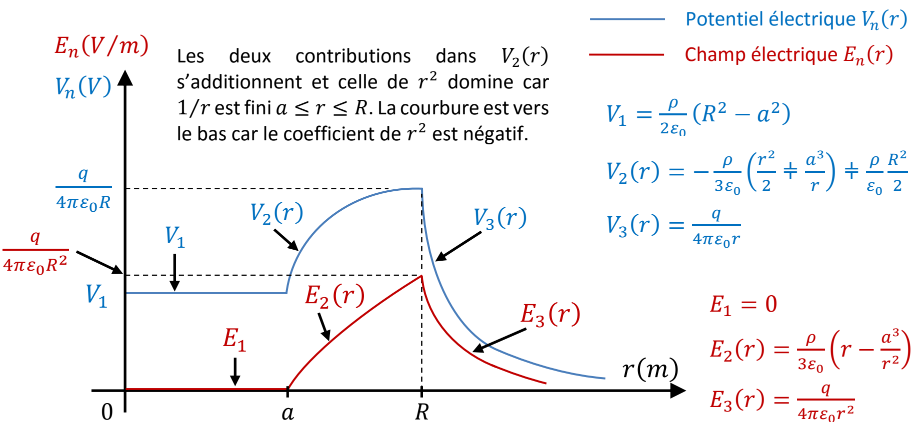
$$C_1 = V_2(a) = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{a^2}{2} \mp \frac{a^3}{a}\right) \mp \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{2}$$

$$C_1 = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{a^2}{2} \mp a^2\right) \mp \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{2} = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{3a^2}{2} \mp \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{2}$$

$$C_1 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R^2 - a^2)$$

$$V_1 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R^2 - a^2)$$

Graphes de $E(r)$ et $V(r)$



Les deux contributions dans $V_2(r)$ s'additionnent et celle de r^2 domine car $1/r$ est fini $a \leq r \leq R$. La courbure est vers le bas car le coefficient de r^2 est négatif.

$$V_1 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R^2 - a^2)$$

$$V_2(r) = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{2} + \frac{a^3}{r}\right) + \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{2}$$

$$V_3(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$E_1 = 0$$

$$E_2(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r - \frac{a^3}{r^2}\right)$$

$$E_3(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$